1
अध्याय

वास्तविक संख्याएँ

महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका–दो घनात्मक पूर्णांक 'a' और 'b' के लिए संतुष्ट करने वाली पूर्ण संख्याएँ 'q' व 'r' इस प्रकार है।

$a = bq + r$, $0 \le r < b$

2. यूक्लिड विभाजन पूर्णांकों a और b $(a > b)$ का म. स. नीचे दर्शायी गई विधि द्वारा प्राप्त किया जाता है।

चरण 1 : q ओर r ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग कीजिए जहाँ $a = bq + r$, $0 \le r < b$.

चरण 2 : यदि $r = 0$ तो म.स. व $(a, b) = b$

चरण 3 : यदि $r \neq 0$ तो b और r यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग कीजिए। इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखिए जब तक शोषफल शुन्य न प्राप्त हो। इस स्थिति वाला भाजक म.स. (a, b) होगा।

3. **अंकगणित की आधारभूत प्रमेय**–प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त (गुणनखंडित) किया जा सकता है। तथा वह गुणनखण्ड अद्वितीय होता है। इस पर कोई ध्यान दिए बिना कि अभाज्य गुणनखण्ड किस क्रम में आ रहे हैं।

4. मान लीजिए $x=\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ तथा 'q' का अभाज्य गुणनखण्ड $2^n \times 5^n$, के रूप का है। जहाँ m और n ऋणेतर पूर्णांक है। तो x का दशमलव प्रसार सांत होगा।

5. मान लीजिए $x=\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ एक ऐसी परिमेय संख्या है। कि q का अभाज्य गुणनखण्ड 2^m5^n, के रूप का नहीं है। जहाँ m, n ऋणेतर पूर्णांक है तो x का दशमलव प्रसार अंसात आवर्ती होगा।

अति लघुउत्तराय प्रश्न

1. प्रत्येक घनात्मक सम पूर्णांक का सामान्य रूप लिखिए।

2. प्रत्येक घनात्मक विषम पूर्णांक का सामान्य रूप लिखिए।

3. यदि n^2-1 , 8 से भाज्य है तो n के मान लिखिए।

4. $7 \times 11 \times 13 + 7$ एक भाज्य संख्या है या अभाज्य संख्या है। बताइए।

5. बताइए 5.131131113... एक परिमेय संख्या है या अपरिमेय संख्या।

6. यदि 65 और 117 के म.स. को $65m - 117$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

7. एक अपरिमेय और परिमेय संख्या का गुणनखण्ड क्या होगा?

8. $\frac{13497}{1250}$ का दशमलव निरूपण कितने दशमलव स्थान के बाद सांत होगा।

9. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 1 से 10 तक की सभी संख्याओं से विभाजय है।

10. यदि संख्याएँ 525 और 3000; 3, 5, 15, 25 और 75 से भाज्य है तो 525 और 3000 का म. स. लिखिए।

लघु उत्तरीय प्रश्न–(1)

11. क्या दो संख्याओं का म.स. 18 और ल.स. 380 हो सकता है? कारण बताओः

12. यदि $a = 4q + r$ है तो a तथा q किस प्रकार की संख्याएँ होंगी? r के सम्भव मान लिखिए।

13. 9^n का ईकाई का अंक बताइए।

14. यदि n एक घनात्मक विषम पूर्णांक है, तो दर्शाइए कि $n^2 - 1$, 8 से विभाजय है,

15. यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम द्वारा 16 और 28 का म.स. ज्ञात कीजिए।

16. यदि n एक प्राकृत संख्या हे तो दिखाइए 12^n का ईकाई का अंक 0 या 5 नहीं हो सकता है।

17. लम्बी विभाजन विधि का प्रयोग किए बिना बताइए कि $\frac{395}{10500}$ का दशमलव प्रसार सांत है या असान्त आवर्ती।

18. यदि किसी परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार 327. 7081. हो और यदि वह $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त करें तो उसके हर (q) के अभाज्य गुणनखण्ड के बारे में आप क्या कह सकते है।

19. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ को गुणा करने पर एक परिमेय संख्या प्राप्त हो। उस परिमेय संख्या को भी ज्ञात करो।

20. $\sqrt{3}$ तथा $\sqrt{5}$ के बीच एक परिमेय तथा एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

लघु उत्तरीय प्रश्न–(2)

21. दर्शाइए कि किसी विषम घनात्मक पूर्णांक का वर्ग $4m+1$ के रूप का होता है, जहाँ m एक घनात्मक पूर्णांक है।

22. दर्शाइए कि किसी घनात्मक पूर्णांक का वर्ग $4q$ या $4q+1$ रूप में होता है, जहाँ q एक घनात्मक पूर्णांक है।

23. दर्शाइए कि किसी घनातमक पूर्णांक का घन $4m, 4m+1$ या $4m+3$ के रूप में होता है, जहाँ m एक पूर्णांक है।

24. सिद्ध कीजिए $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

25. अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का कथन लिखिए। इसका प्रयोग करते हुए 120 के अद्वितीय गुणनखण्ड कीजिए।

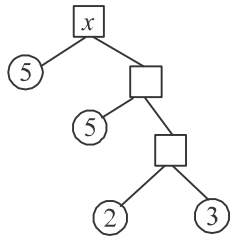
26. सिद्ध कीजिए $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

27. सिद्ध कीजिए $5-\frac{3}{7}\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

28. सिद्ध कीजिए $\frac{1}{2-\sqrt{5}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

29. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा 56 और 112 का म.स. निकालो।

30. गुणनखण्ड वृक्ष में x का मान ज्ञात कीजिए।



दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

31. $\sqrt{45}\times\sqrt{20}$ को हल करो। बताइए यह परिमेय संख्या है या अपरिमेय संख्या।

32. यूक्लिड विभाजन एल्गोरिशम द्वारा 56, 96, 324 का म. स. ज्ञात कीजिए।

33. दर्शाइए कि किसी भी पूर्णांक q के लिए कोई भी घनात्मक विषम पूर्णांक $6q + 1, 6q + 3$ या $6q + 5$, के रूप में होगा।

34. दर्शाइए कि किसी घनात्मक पूर्णांक का वर्ग $5q, 5q + 1$ या $5q + 4$ के रूप का होता है, जहाँ q एक घनात्मक पूर्णांक है।

35. सिद्ध कीजिए कि तीन क्रमागत घनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 6 से भाज्य है।

36. किसी भी घनात्मक पूर्णांक n के लिए सिद्ध कीजिए कि $n^3 - n$, 6 से भाज्य है।

37. सिद्ध कीजिए $n, n + 2, n + 4$ में से एक ओर केवल एक 3 से भाज्य है।

38. सिद्ध कीजिए $n, n + 4, n + 8, n + 12$ और $n + 16$ में से एक और केवल एक ही 5 से विभाज्य है, n एक घनात्मक पूर्णांक है।

39. सलमान, ऋतिक और जॉन तीन घनिष्ठ मित्र थे। वे प्रातः कालीन भ्रमण पर एक साथ जाते थे। एक बार वे एक साथ निकलते हैं; इनके कदमों के नाप क्रमशः 40 से.मी., 42 से.मी. तथा 45 से.मी. है।

(*a*) ज्ञात कीजिए कितनी न्यूनतम दूरी प्रत्येक के चलने के लिए आवश्यक है ताकि उस दूरी को पूर्ण कदमों में तय कर सकें?

40. आकृति ने अपने जन्मदिन के उपलक्ष में एक अनाथाश्रम में दूध वितरित करने का निर्णय लिया। दूध के विक्रेता ने दूध के दो कंटेनर में 398 ली. और 436 ली. दूध है। एक ड्रम द्वारा इसमें से दूध तीसरे कंटेनर में डालना है। तीसरे कंटेनर में ड्रम द्वारा पलटने पर क्रमशः 7 ली. और 11 ली. दूध बचता है।

(*a*) ड्रम की अधिकतम धारिता ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

1. $2m$ **2.** $2t + 1$

3. एक विषम पूर्णांक **4.** भाज्य संख्या

5. अपरिमेय संख्या **6.** 2

7. अपरिमेय संख्या **8.** 4

9. 2520 **10.** 75

11. नहीं; म.स., ल.स., का गुणनखण्ड नहीं हैं।

12. a, q घनात्मक पूर्णांक, $0 \le r < 4$

13. समघात = 1 , विषम घात = 9

14. — **15.** 4

16. — **17.** असांत आवर्ती

18. हर 2 and 5 की घातों का गुणज (हर $= 2^m \times 5^n$)

19. $\sqrt{5} + \sqrt{2}$, 3 **20.** —

21. — **22.** —

23. — **24.** —

25. $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ **26.** —

27. — **28.** —

29. म.स. = 56, ल.स. = 112 **30.** 150

31. 30, परिमेय संख्या **32.** 4

33. — **34.** —

35. — **36.** —

37. — **38.** —

39. (*a*) 2520 m , 25.2m

40. (*a*) 17

अभ्यास प्रश्न–प्रत्र

वास्तविक संख्याएँ

समय : 50 मिनट *अंक : 20*

खण्ड–अ

1. $\frac{51}{150}$ का दशमलव निरूपण कितने दशमलव स्थान के बाद सांत होगा। **1**

2. यदि $a = bq + r$ है, a, b घनात्मक पूर्णांक है तब r के क्या मान हो सकते है? (यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका में) **1**

खण्ड–ब

3. दर्शाइए कि 9^n की ईकाई की संख्या कभी भी शून्य नहीं होगी। **2**

4. लम्बी विभाजन विधि का प्रयोग करे बिना बताइए कि $\frac{935}{10500}$ का दशमलव प्रसार सांत है या असांत आवर्ती। **2**

खण्ड–स

5. सिद्ध कीजिए $\frac{1}{3-2\sqrt{5}}$ अपरिमेय संख्या है। **3**

6. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका द्वार 36, 96 और 120 का म. स. ज्ञात कीजिए। **3**

खण्ड–द

7. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी भी घनात्मक पूर्णांक का घन $9q, 9q + 1$ या $9q + 8$ के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है। **4**

8. एक बार एक खेल का सामान बेचने वाले विक्रेता ने एक 'पैदल चलने के फायदे' को जागरूकता के लिए एक अभियान चलाया। जिसमें सोहम और बानी ने हिस्सा लिया किसी खेल के मैदान के चारों और एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में बानी को 18 मिनट ओर सोहम को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करके एक ही दिशा में चलते हैं। तो

(a) कितने समय बाद वे पुनः प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे? **4**

□□□