12
अध्याय

वृत्तों से सम्बंधित क्षेत्रफल

महत्वपूर्ण बिन्दु:

1. **यदि एक वृत्त की त्रिज्या '*r*' हो तो:**

   (i) परिधि $= 2\pi r$ या πd, $d = 2r$ है।

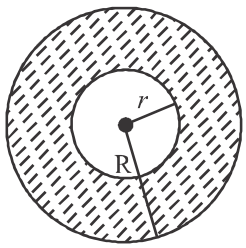
   (ii) क्षेत्रफल $= \pi r^2$

   (iii) अर्धवृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2}{2}$

   (iv) चर्तुथांश का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2}{4}$

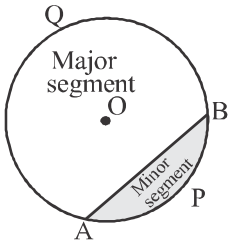
2. **दो संकेन्द्रीय वृत्तों द्वारा आन्तरित क्षेत्रफल**

   यदि दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्या में R तथा r है तो दोनों वृत्तों द्वारा आन्तरित क्षेत्रफल $= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R+r)(R-r)$



3. **त्रिज्याखंड और उसका क्षेत्रफल**

   किसी वृतीय क्षेत्र के उस भाग को जो वृत्त की दो त्रिज्याओं और उनके संगत चाप द्वारा घिरा हो, उस वृत्त का एक त्रिज्याखण्ड कहते है। दिए गए चित्र में APB लघु त्रिज्याखण्ड तथा AQB दीर्घ त्रिज्याखण्ड है।



त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल जिसका त्रिज्याखण्ड कोण θ है $= \frac{\theta}{360^0} \times \pi r^2$

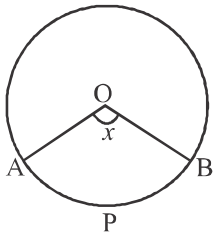
$= \frac{1}{2} \times$ चाप की लम्बाई $\times$ त्रिज्या $= \frac{1}{2} lr$

कोण θ वाले त्रिज्यखण्ड के संगत चाप की लम्बाई $= \frac{\theta}{360^0} \times 2\pi r$

$= \frac{\theta}{360^0} \times \pi d$

4. वृत्तखण्ड और उसका क्षेत्रफल :

वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो एक जीवा और संगत चाप के बीच में परिबद्ध हो, एक वृत्तखण्ड कहलाता है। दिए गए चित्र में APB लघु वृत्तखण्ड तथा AQB दीर्घ वृत्तखण्ड है।



वृत्तखण्ड APB का क्षेत्रफल = त्रिज्याखण्ड OAPB का क्षेत्रफल $-$ ΔOAB का क्षेत्रफल

$= \frac{\theta}{360^0} \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$ या $= \frac{\theta}{360^0} \pi r^2 - r^2 \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}$

5. कुछ महत्वपूर्ण परिणाम :

(i) यदि दो वृत्त अन्तः स्पर्श करते हैं, तो उनके केन्दों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं के अन्तर के बराबर होती है।

(ii) यदि दो वृत्त बाहयतः स्पर्श करते हैं, तो उनके केन्द्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं के योगफल के बराबर होती है।

(iii) किसी घूमते हुए पहिये द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी उस पहिये की परिधि के बराबर होती है।

(iv) किसी घूमते हुए पहिये द्वारा मिनट में लगाये गये चक्करों की संख्या

$$= \frac{\text{एक मिनट में चली गयी दूरी}}{\text{पहिये की परिधि}}$$

(v) लघु त्रिज्यखण्ड वृत्त के केन्द्र पर लघु कोण (मान लीजिए θ) आन्तरित करता है जबकि दीर्घ त्रिज्याखण्ड केन्द्र पर अधिककोण $(360° - \theta)$ आन्तरित करता है।

(vi) वृत्त के लघु तथा दीर्घ त्रिज्याखण्डों के क्षेत्रफलों का योगफल वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर होता है।

(vii) किसी त्रिज्याखण्ड का परिमाप उसकी संगत चाप तथा संगत त्रिज्याओं के योगफल के बराबर होता है।

(viii) घंटे की सुई द्वारा 1 मिनट में बना कोण $= \left(\frac{1}{2}\right)^o$

(ix) मिनट की सुई द्वारा 60 मिनटों में बनाया कोण $= 360^0$

(x) मिनट की सुई द्वारा 1 मिनटों में बनाया गया कोण $= 6^0$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. यदि एक अर्धवृत्ताकार चॉदे का व्यास 14 सेमी है, तो इसकी परिधि ज्ञात कीजिए।
2. एक वृत्त की परिधि तथा क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से समान हो तो वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए।
3. $'a'$ सेमी भुजा वाले वर्ग के अन्तनिहित एक वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. एक वृत्त के त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिल्या r तथा संगत चाप की लम्बाई l है।
5. एक पहिए की त्रिज्या 0.25 मी. है। पहिए द्वारा 11 किमी दूरी तय करने में लगाए गए चक्करों की संख्या ज्ञात कीजिए।
6. यदि एक वृत्त का क्षेत्रफल 616 वर्ग सेमी हो तो इसकी परिधि ज्ञात कीजिए।
7. एक 6 सेमी वाले वर्ग के अन्तनिहिर्त वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. एक वृत्त का क्षेत्रफल दो वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है। दोनों वृत्तों की त्रिज्याएं 24 सेमी तथा 7 सेमी है तो बड़े वृत का व्यास ज्ञात कीजिए।

9. एक तार को मोड़कर 35 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाया जा सकता है। यदि इसी तार को एक वर्ग के आकार में मोड़ा जाए तो वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. एक वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी0 है तथा एक चाप की लम्बाई 3π सेमी0 है। इस चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर आन्तरिक कोण का मान ज्ञात कीजिए।

11. एक वृत्त के त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र लिखिए जिसका केन्द्र पर कोण θ तथा त्रिज्या $\mathbf{r}$ है।

12. यदि दो वृत्तों की परिधियों 2:3 के अनुपात में हो, तो इनके क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए।

13. एक वृत्त की परिधि तथा त्रिज्या का अन्तर 37 सेमी0 हो तो वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए।

$\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ लें

14. यदि एक वृत्त का व्यास 40% बढ़ा दिया जाए तो कितने प्रतिशत से इसका क्षेत्रफल बढ़ेगा।

15. एक घड़ी की घण्टे की सुई की लम्बाई 6 सेमी है। प्रातः 11:20 बजे से 11:55 बजे तक घण्टे की सूई द्वारा अंकित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

लघुत्तरात्मक प्रश्न 1

16. एक वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 22 सेमी0 है।

17. 10 सेमी0 त्रिज्या वाले वृत्त की किसी चाप की लम्बाई 5π सेमी. हो तो उस चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर आन्तरिक कोण का मान ज्ञात कीजिए।

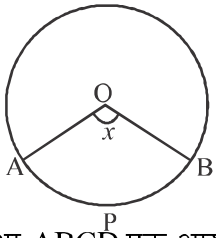
18. यदि एक वर्ग का वृत्त के अन्तर्निहित हो, तो वृत्त तथा वर्ग के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

19. यदि किसी अर्धवृत्त की परिधि 18 सेमी. हो तो उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

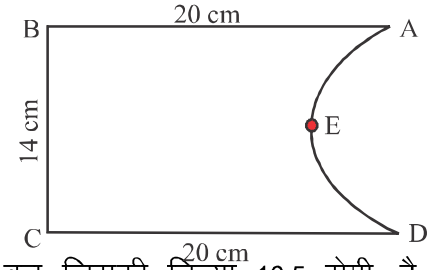
20. यदि एक वृत्त की परिधि एक वर्ग के परिमाप के बराबर हो तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?

21. एक वृत्त का व्यास तथा एक समबाहु त्रिभुज की भुजा की लम्बाई समान हो तो इनके क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?

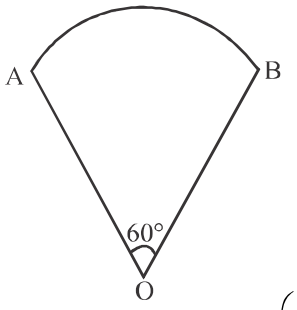
22. संलग्न चित्र में, O एक वृत्त का केन्द्र है। यदि त्रिज्याखण्ड OAB का क्षेत्रफल, वृत्त के क्षेत्रफल का $\frac{5}{18}$ हो तो x ज्ञात कीजिए।



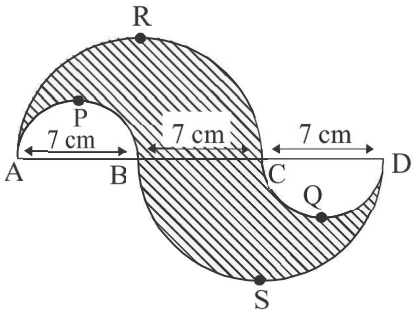
23. दिए गए चित्र में जहां AED एक अर्धवृत्त तथा ABCD एक आयत है तो चित्र का परिमाप ज्ञात कीजिए।



24. दिया गया चित्र एक वृत्त जिसकी त्रिल्या 10.5 सेमी. है, का त्रिज्याखण्ड है। इस त्रिज्याखण्ड का परिमाप ज्ञात कीजिए।



25. छायांकित भाग का परिमाप ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

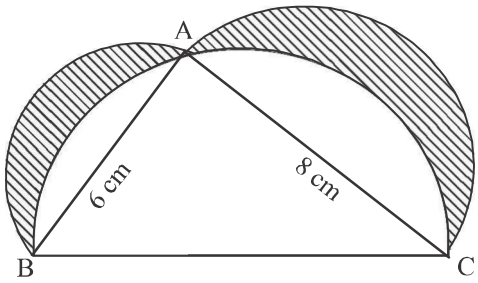


लघु उत्तरीय प्रश्न 2

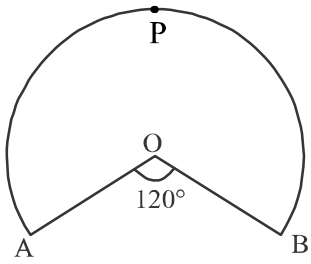
26. 36 सेमी. त्रिज्या वाले एक वृत्त का त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल 54π वर्ग सेमी. हो तो संगत चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

27. एक घड़ी की मिनट की सुई 5 सेमी. लम्बी है। मिनट की सुई द्वारा प्रात : 6:05 बजे से 6:40 बजे तक बुहार किया गया क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

28. दिए गए चित्र में ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कोण $A = 90^0$, $AB = 6$ सेमी. तथा $AC = 8$ सेमी. है। AB, AC तथा BC को व्यास लेकर अर्धवृत्त खींचे गए हैं, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



29. दिए गए चित्र में OAPB, एक वृत्त जिसकी त्रिज्या 3.5 सेमी तथा कोण $AOB = 120^0$ का त्रिज्याखण्ड है। OAPBO का परिमाप ज्ञात कीजिए।



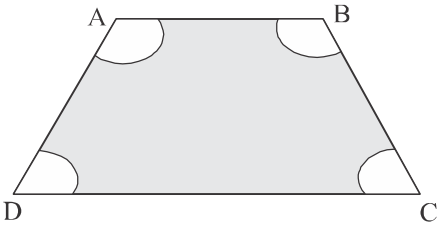
30. एक वृत्ताकार पदपथ (फुटपाथ) जिसकी चौड़ाई 2 मी0 को रू20 प्रतिवर्ग मी0 की दर से एक वृत्ताकार, पार्क जिसकी त्रिज्या 1500 मी0. के चारों ओर बनाया गया है। पदपथ (फुटपाथ) को बनाने में कुल कितना खर्च आएगा? ($\pi = 3.14$ लीजिए)

31. एक लड़का इस प्रकार साईकिल चला रहा है कि साईकिल के पहिए प्रति मिनट 140 चक्कर लगाते हैं यदि पहिए का व्यास 60 सेमी0 हो तो साईकिल की चाल ज्ञात कीजिए।

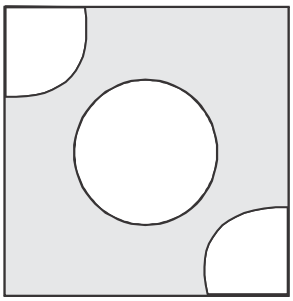
32. 5 सेमी0 त्रिज्या वाले वृत्त की जीवा ABकी लम्बाई $5\sqrt{3}$ सेमी0 है। लघु त्रिज्याखण्ड AOB का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

33. एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $_{49}\sqrt{3}$ वर्ग सेमी0 है। प्रत्येक शीर्ष को केन्द्र मानकर, त्रिभुज की भुजा की लम्बाई की आधी त्रिज्या लेकर वृत्त खींचे गए है।। त्रिभुज के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो वृत्तों में सम्मिलित नहीं है।

34. ABCD एक समलम्ब जिसमें AB\\DC,AB = 18 सेमी0, DC = 32 सेमी0 तथा AB और DC के बीच की दूरी 14 सेमी0 है। शीर्षों A,B,C और D को केन्द्र लेकर चार बराबर त्रिज्या 7 सेमी0 वाले वृत्त बनाए गए है तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

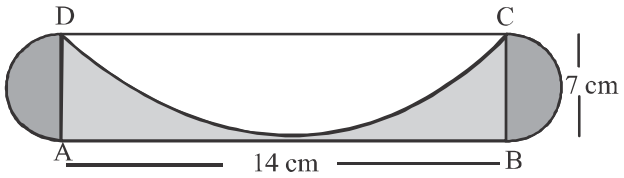


35. एक 6 सेमी0 भुजा वाले वर्ग के दो सम्मुख कोणों से 1.4 सेमी0 त्रिज्या के दो चतुर्थांश काटे गए हैं। वर्ग के बीच में 4.2 सेमी0 व्यास का एक अन्य वृत्त भी काटा गया है जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



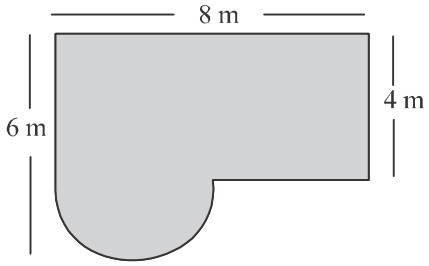
36. एक 100^0 का त्रिज्याखण्ड एक वृत्त से काटा गया है जिसका क्षेत्रफल 70.65 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। $(\pi = 3.14)$.

37. दिए गए चित्र में, ABCD एक आयत है जिसमें AB = 14 सेमी और BC=7 सेमी है। DC, BC तथा AD को व्यास मानकर, तीन अर्धवृत्त खींचे गए है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



38. एक वर्गाकार पानी के टैंक के आधार की प्रत्येक भुजा 40 मी0 है। इसके चारों ओर चार अर्धवृत्ताकार घास के मैदान है। रू 1.25 प्रति वर्ग मी0 की दर से मैदान को समतल कराने का व्यय कीजिए ($\pi = 3.14$ लें)

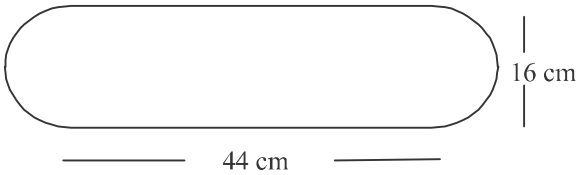
39. छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



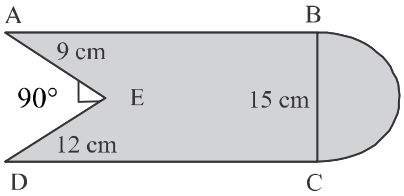
40. 28 सेमी0. त्रिज्या वाले वृत्त की कोई जीवा वृत्त के केन्द्र पर 45^0 का कोण बनाती है। जीवा द्वारा काटे गये लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

41. एक तार को मोड़कर, वृत्त के केन्द्र पर 45^0 का कोण आन्तरित करने वाली चाप के रूप में बनाया जा सकता है। यदि तार की लम्बाई 11 सेमी0 हो तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

42. दिए गए चित्र में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

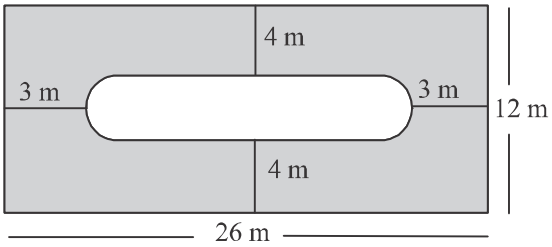


43. दिए गए चित्र का क्षेत्रफल वर्ग सेमी0 में ज्ञात कीजिए।



44. यदि एक वृत्त की परिधि इसके व्यास से 16.8 सेमी0 अधिक हो तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

45. छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



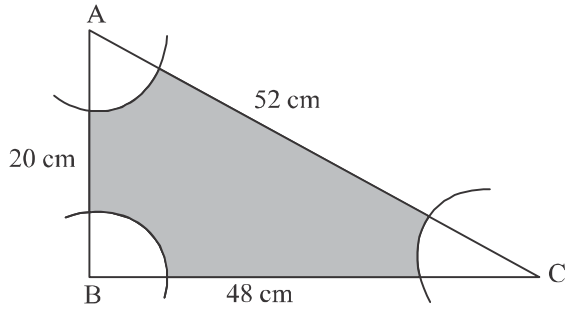
46. दो वृत्त बाहयतः स्पर्श करते हैं। यदि इनके क्षेत्रफलों का योग 130π वर्ग सेमी0 है तथा इनके केन्द्रों के बीच की दूरी 14 सेमी0 है, तो इन वृत्तों की त्रिज्यायें ज्ञात कीजिए।

47. तीन वृत्त जिनकी त्रिज्याऐं 7 सेमी0 हैं, इस प्रकार खींचे गए हैं कि हर वृत्त बाकी दो वृत्तों को स्पर्श करता है। तीनों वृत्तों के बीच वाले भाग को क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

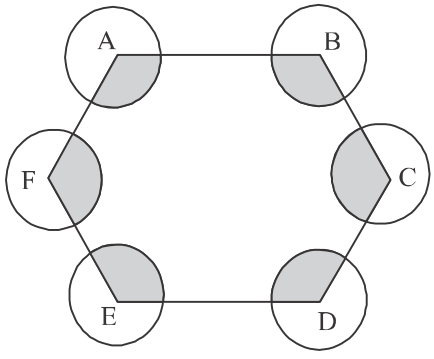
48. एक पहिए का क्षेत्रफल 6.16 वर्ग मी0 है। पहिए को 572 मी0 की दूरी तय करनें के लिए कुल कितने चक्कर लगाने पड़ेंगे।

49. एक समचतुर्भुज के सभी शीर्ष एक वृत्त पर है, यदि वृत्त का क्षेत्रफल 2464 वर्ग सेमी0 हो तो समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

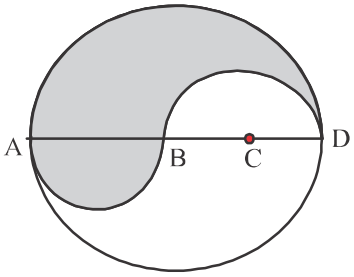
50. त्रिभुज ABC के शीर्षें A, B तथा C को केन्द्र लेकर तीन त्रिज्याखण्ड बनाए गए हैं जिनकी त्रिज्या 6 सेमी0 है। यदि AB=20 सेमी0 BC =48 सेमी0 और CA=52 सेमी0 हो, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)



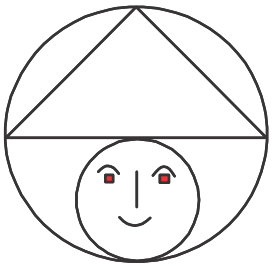
51. दी गई आकृति में, ABCDEF एक समषदभुज है जिसके शीर्षों को केन्द्र मानकर समान त्रिज्या r के वृत्त खींचे गए हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



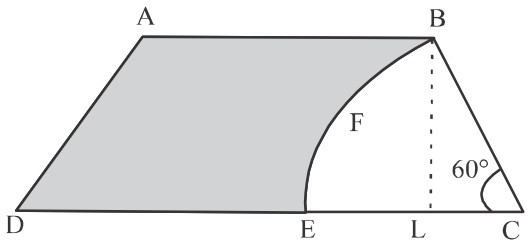
52. एक 6 सेमी0 त्रिज्या के वृत्त का व्यास ABCD इस प्रकार है कि AB, BC तथा CD बराबर है। चित्र के अनुसार AB और BD को व्यास मानकर अर्धवृत्त खींचे गए हैं। छायांकित भाग का परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



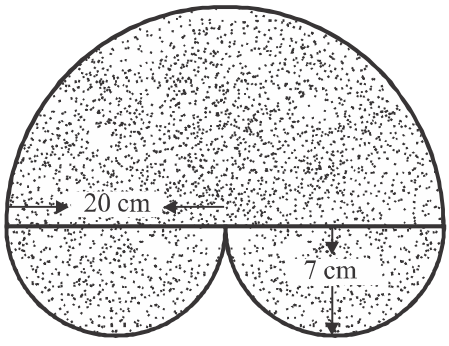
53. सड़क पर एक गरीब कलाकार बच्चों के लिए मजाकिया कार्टून बनाता है तथा अपनी जीविका अर्जित करता है। एक बार उसने आकृति में दर्शाए अनुसार एक हास्यकर मुख बनाया, जिसके लिए उसने एक वृत्त के अन्दर वृत्त खींचा, जहां बड़े वृत्त की त्रिज्या 30 सेमी0 और छोटे वृत्त की त्रिज्या 20 सेमी0 है। इस आकृति में टोपी के लिए कितना क्षेत्रफल दिया गया है?



54. दिए गए चित्र में, ABCD एक समतलम्ब चतुर्भुज है AB\\DC तथा कोण BCD=60^0 है। यदि BFEC केन्द्र C वाले वृत्त का त्रिज्याखण्ड है और AB=BC=7 सेमी0 तथा DE=4 सेमी0 हो, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7} \text{ तथा } \sqrt{3} = 1 \cdot 732\right)$ का प्रयोग कीजिए।



55. दिए गए चित्र में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तरमाला

1. 36 सेमी.
2. 4 इकाई
3. $\pi \frac{a^2}{4} cm^2$
4. $\frac{1}{2} lr$ वर्ग ईकाई
5. 7000
6. 88 सेमी.
7. 9π वर्ग सेमी.
8. 50 सेमी.
9. 3025 cm^2
10. 90^0
11. $\frac{\theta}{360^0} \times \pi r^2$
12. 4:9
13. 44 सेमी.
14. 96%
15. 5.5 cm^2
16. 9.625 cm^2
17. 90^0
18. π:2य /11:7
19. 3.5 सेमी.
20. 4:π
21. π:$\sqrt{3}$
22. 100 सेमी.
23. 76 सेमी.
24. 32 सेमी.
25. 66 सेमी.
26. 3π सेमी.
27. $45\frac{5}{6} cm^2$
28. 24 cm^2
29. 21.67 सेमी.
30. ₹377051.2
31. 15.84 किमी / घंटा
32. $\frac{25}{3} \pi cm^2$
33. 7.77 cm^2
34. 196 cm^2
35. 5.48 cm^2
36. 9 सेमी.
37. 59.5 cm^2
38. 5140
39. $(32 + 2\pi) cm^2$
40. $(308 - 196\sqrt{2}) cm^2$
41. 14 सेमी.
42. $(704 + 64\pi) cm^2$

43. 334.31 cm^2

44. 3.92 cm^2

45. $(248-4\pi)cm^2$

46. 11 cm और 3 cm

47. 7.87 cm^2

49. 1568 cm^2

48. 65

50. 423.48 cm^2

51. $2\pi r^2$

52. P=37.71 cm, A = 37.71 cm^2

53. $400\sqrt{2}$ cm^2

54. 28.89 cm^2

55. 462 cm^2

अभ्यास प्रश्न पत्र

वृत्तों से सम्बंधित क्षेत्रफल

समयः 50 मिनट *अंक : 20*

खण्ड–अ

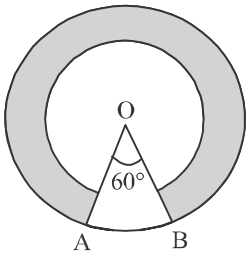
1. यदि दो वृत्तों की परिधि बराबर हो तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा? 1
2. यदि चाँदे का व्यास 21cm हो तो इसका परिमाप ज्ञात कीजिए। 1

खण्ड–ब

3. यदि एक वृत्त की परिधि 22 सेमी. हो तो वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 2
4. एक वृत्त के चतुर्भाश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 44 सेमी. है 2

खण्ड–स

5. एक घोड़े को 28 सेमी लम्बी रस्सी द्वारा एक खम्भे से बॉधा गया है। घोड़े द्वारा खायी जाने वाली घास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 3
6. दिए गए चित्र में $OA = 42$ सेमी. , $OC = 21$ सेमी. तथा व्यास $\angle AOB = 60^0$ है तो छायांकित भाग को क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 3



खण्ड–द

7. यदि 10 सेमी. त्रिज्या के वृत्त में एक जीवा AB वृत्त के केन्द्र पर समकोण बनाती हो, तो लघु तथा दीर्घ हत्तखण्ड के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (दिया है : $\pi = 3.14$) 4
8. ABCP एक 20 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त का चतुर्थांश है। AC को व्यास मानकर एक अर्धवृत खींचा गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4

