13

अध्याय

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

महत्त्वपूर्ण बिन्दु:

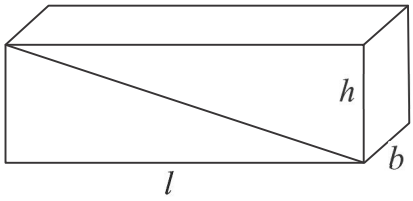
1. **घनाभ** = 3– आयामी आकार जैसे किताब, माचिस की डिब्बी, अलमारी इत्यादि घनाभ कहलाती हैं।

माना, लम्बाई = 1, चौड़ाई = b, ऊंचाई = h

आयतन = $l \times b \times h$

ठोस घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2h(l + b)$

ठोस घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(lb + bh + lh)$



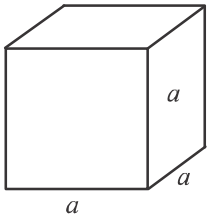
2. **घन** = 3– आयामी आकर जैसे आइस–क्यूबस, लूडो का पासा इत्यादि घन कहलाती हैं।

माना, लम्बाई = चौड़ाई = ऊंचाई = a

आयतन = a^3

ठोस घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4a^2$

ठोस घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$



3. बेलन = 3– आयामी आकार जैसे जार, स्तंभ, पाइप, रोड़–रोलर इत्यादि बेलन कहलाते हैं।

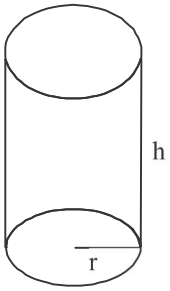
(क) माना, आधार त्रिज्या $= r$

ऊंचाई $= h$

आयतन $= \pi r^2 h$

ठोस बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

ठोस बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(r + h)$



(ख) बेलन (खोखला) के लिए,

बाह्य त्रिज्या $= R$

अन्तः त्रिज्या $= r$

ऊंचाई $= h$

आयतन $= \pi(R^2 - r^2)h$

वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi(R + r)h$

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi(R + r)h + 2\pi(R^2 - r^2)$

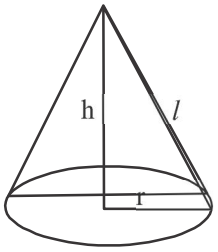
4. **शंकु** : 3– आयामी आकार जैसे टैंट, आइसक्रीम कोन को शंकु कहते हैं।

माना, आधार त्रिज्या $= r$

ऊंचाई $= h$

तिरछी ऊंचाई $= l$

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$



आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

ठोस शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

ठोस शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r(l + r)$

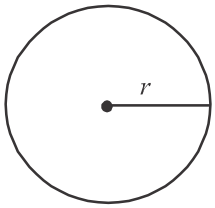
ध्यान दें,

यदि एक शंकु व एक बेलन दोनों की आधार त्रिज्याएं समान हों व दोनों की ऊंचाई भी समान हो तब

3 × शंकु का आयतन = बेलन का आयतन

5. गोला : 3–आयामी आकार जैसे क्रिकेट बॉल, फूटबॉल इत्यादि को गोला कहते हैं।

(क) माना, त्रिज्या $= r$



आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

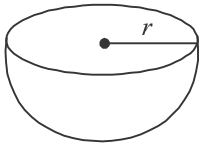
(ख) अर्ध गोलाकार (ठोस)

त्रिज्या $= r$

आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

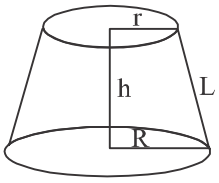
वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$



6. छिन्नक : जब एक शंकु को आधार के समांतर काटा जाता है तो उस कटाव से नीचे आधार तक के भाग को शंकु का छिन्नक कहते हैं।

उदाहरण–तुर्की टोपी



माना,

आधार त्रिज्या $= R$

उपरी त्रिज्या $= r$

तिर्यक ऊंचाई $= h$

$l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$

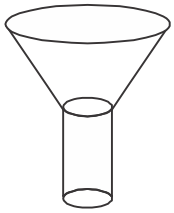
आयतन $= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$

वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (ठोस) $= \pi l(R + r)$

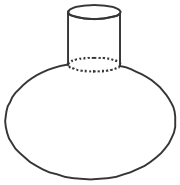
कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (ठोस) $= \pi l(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. ''कीप'' किन दो ज्यामितीय आकारों का संयोजन है?



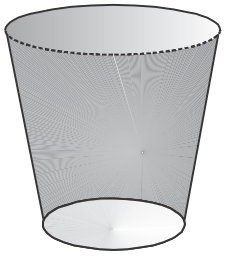
2. ''सुराही'' किन दो ज्यामितीय आकारों का संयोजन है?



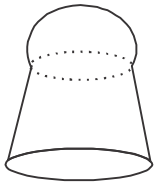
3. एक बेलनाकार ''पेंसिल'' जो एक सिरे से छिली गई है, किन दो ज्यामितीय आकारों का संयोजन है?



4. दी गई ''गिलास'' की आकृति, किस 3– आयामी ज्यामिति आकारों सी प्रतीत होती है?



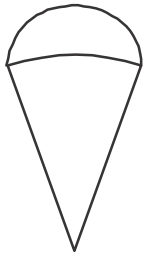
5. चिड़्ड़ी–छक्का खेलने के लिए उपयोग में आने वाली ''चिड़्ड़ी'' ज्यामितीय आकारों का संयोजन है?



6. गिल्ली डंडा खेल में प्रयोग में आने वाली ''गिल्ली'' किन–किन ज्यामितीय आकारों का संयोजन है?



7. राजमिस्त्री द्वारा प्रयोग में लाया जाने वाला ''साहुल'' किन दो ज्यामितीय आकारों का संयोजन है?



8. एक ठोस आकृति को दूसरी ठोस आकृति में रूपांतरण के दौरान, नई ठोस आकृति के आयातन पर क्या प्रभाव होगा?

9. शंकु को आधार के समानांतर विभाजित करने पर होता प्राप्त छिन्नक का उपरी अनुप्रस्थ काट का क्षेत्र किस आकृति का है?

10. एक ठोस–अर्ध–गोलाकार, जिसकी त्रिज्या 7 सेमी है, का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए।

11. दो गोलों के आयतन का अनुपात 64 : 125 है। इनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात बताइए।

12. उस गोले का अधिकतम व्यास बताइए जिसे r सेमी. त्रिज्या व h सेमी ऊंचाई $(h > 2r)$ के बेलन ने पूरी तरह से समाहित कर लिया है।

13. बेलन व शंकु के आयतन का अनुपात बताइए यदि इनके आधार की त्रिज्या समान है व दोनों की ऊंचाई भी समान है।

14. एक गोले (ठोस) जिसकी त्रिज्या r है, को पिघलाकर r ऊंचाई वाला एक ठोस शंकु बनाया गया है। शंकु के आधार की त्रिज्या बताइए।

15. एक ठोस अर्ध गोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए यदि इसकी त्रिज्या r है।

16. यदि एक गोले का आयतन उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के बराबर है, तो गोले की त्रिज्या बताइए।

17. एक बेलन, एक शंकु और एक अर्ध–गोले के आधार की त्रिज्याएं समान हैं। इनकी ऊंचाई भी समान हैं। तीनों के आयतनों का अनुपात बताइए।

18. समान त्रिज्या r वाले दो ठोस अर्ध–गोलों के आधारों की ओर से मिलकर जो आकृति प्राप्त होगी, उसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए।

19. एक घन का आयतन 1331 सेमी.^{3} है। इसकी भुजा की लम्बाई बताइए।

20. एक खोखले बेलन की ''क्षमता'' का अर्थ क्या होता है?

लघु उत्तरीय प्रश्न 1

21. एक ठोस घनाभ जिसकी भुजाएं 16 cm × 12 cm × 10 cm है, में से 2 cm भुजा वाले कितने घन बनाए जा सकते हैं।

22. 729 cm^3 आयतन वाले घन में से अधिक से अधिक कितनी ऊंचाई वाला शंकु काटा जा सकता है?

23. 64 cm^3 आयतन वाले दो घनों को मिलाकर घनाभ बनाया जाता है। इस घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए।

24. एक 2 cm व्यास व 16 cm ऊंचाई वाले ठोस धातु के बेलन को पिघलाकर बारह एक ही आकार के गोले बनाए गए। प्रत्येक गोले की त्रिज्या बताइए।

25. बाल्टी के दो सिरों का व्यास 44 cm और 24 cm है। बाल्टी की ऊंचाई 35 cm है। बाल्टी का आयतन बताइए।

लघु उत्तरीय प्रश्न 2

26. उस छड़ की अधिकतम लंबाई बताइए जिसे 10 m × 10 m × 5 m के कमरे में रखा जा सकें?

27. एक घन जिसका आयतन 1000 cm^3 है, का पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए।

28. दो अर्ध–गोलों के आयतन का अनुपात 8 : 27 है। इनकी त्रिज्याओं का अनुपात बताइए।

29. एक ठोस शंकु जिसकी ऊंचाई 28 cm है और त्रिज्या 21 cm है, का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल व कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बताइए।

30. शंकु के छिन्नक के रूप की बाल्टी 28,490 लीटर पानी से पूरी तरह भरी है। इसके ऊपर और नीचे की त्रिज्याएं 28 cm व 21 cm क्रमशः है। बाल्टी की ऊंचाई बताइए।

31. तीन एक ही धातु के घनों की भुजाओं का अनुपात 3 : 4 : 5 है। इन तीनों को पिघलाकर बड़ा घन बनाया गया जिसका विकर्ण $12\sqrt{3}$ है। तीनों घनों की भुजाएं बताइए।

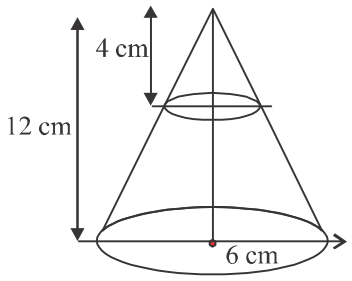
32. 10.5 cm त्रिज्या वाले बेलनाकार टैंक की गहराई का पता लगाएं, अगर इसका आयतन 15 cm × 11 cm × 10.5 cm के घनाभ के आयतन के बराबर हो।

33. 8 cm त्रिज्या और 12 cm ऊंचाई के एक शंकु को उसके आधार के समानंतर धुरी के मध्यबिंदु से दो भागों में बांटा गया है। दोनों भागों के आयतनों का अनुपात बताइए।

34. एक पैट्रोल टैंक मध्य से 28 cm व्यास व 24 cm लम्बाई का बेलनाकार रूप में है। इसके दोनों छोर 28 cm व्यास व 9 cm लम्बाई के शंकुओं से जुड़े हैं। इस टैंक का आयतन बताइए।

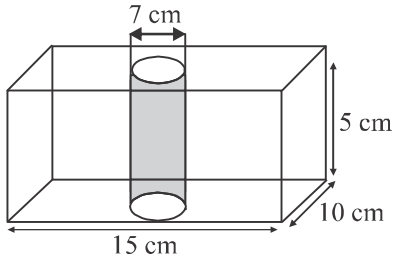
दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

35. दी गई आकृति 12 सेमी0 ऊंचाई के एक ठोस शंकु की है। जिसके आधार की त्रिज्या 6 सेंमी0 है, इसके उपरी भाग से आधार के समांतर तल द्वारा 4 सेमी0 ऊंचाई वाला शंकु काट दिया गया। शेष बचे ठोस का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात किजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ और $\sqrt{5} = 2.236$ लीजिए)



36. एक ठोस लकड़ी का खिलौना, अर्ध गोले पर अध्यारोपित समान त्रिज्या के शंकु के आकार का है। अर्ध गोले की त्रिज्या 3.5 सेमी0 है तथा इस खिलौने को बनाने में $166\frac{5}{6}$ घन सेमी0 लकड़ी लगी है। खिलौने की ऊंचाई ज्ञात कीजिए। खिलौने के अर्ध गोलाकार पृष्ठीय तल को रु 10 प्रति वर्ग सेमी0 की दर से रंग करवाने का व्यास भी ज्ञात कीजिए ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

37. दी गई आकृति, धातु के एक ठोस घनाभाकार ब्लाक की है। इसकी भुजाएं 15cm × 10 cm × 5 cm हैं। इसमें से 7 cm व्यास वाला एक बेलनाकर छेद काट कर निकाल दिया गया है। शेष बचे ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)



38. 2.52 किमी0 प्रति घंटे की गति से पानी एक बेलनाकार पाइप से एक बेलनाकार टैंक में आ रहा है। यदि टैंक के आधार की त्रिज्या 40 cm है। तथा आधे घंटे में इसमें पानी का तल 3.15 m बढ़ जाता है, तो पाइप का आंतरिक व्यास ज्ञात कीजिए।

39. एक ठोस खिलौना बेलनाकार है जिसका एक सिरा अर्धगोलीय तथा दूसरे सिरे पर शंकु है। इन सभी का व्यास 4.2 cm है तथा बेलनाकार और शंक्वाकार भाग की ऊंचाई क्रमशः 12 cm और 7 cm है। खिलौन का आयतन ज्ञात कीजिए।

40. एक टैन्ट 3 m की ऊंचाई तक बेलनाकार और उसके ऊपर शंकु के आकार का है। टैन्ट की कुल ऊंचाई 13.5 m तथा आधार की त्रिज्या 14 m है। टैन्ट को बनाने में लगे कपड़े का व्यय 80 रु0 प्रति वर्ग मी0 की दर से ज्ञात कीजिए।

41. 22 m × 20 m की छत से वर्षा का पानी एक बेलनाकार बर्तन जिसके आधार का व्यास 2 m और ऊंचाई 3.5 m है, में डाला गया। यदि पानी से बर्तन पूरा भर जाए, तो बताइए कितने सेमी वर्षा हुई?

42. 12 cm व्यास तथा 15 cm ऊंचाई वाले एक लंबवृतीय बेलन के आकार का बर्तन आइसक्रीम को 12 cm ऊंचाई तथा 6 cm व्यास वाले शंकुओं, जिनका ऊपरी सिरा अर्धगोलाकार है, भरा जाना है। ऐसे शंकुओं की संख्या ज्ञात कीजिए जो इस आइसक्रीम से भरे जा सकते हैं।

43. 14 cm लम्बे एक लंब खोखले बेलन के बाहरी तथा अंदर के व्रक पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अंतर 88 वर्ग सेमी0 है। यदि बेलन को बनाने में लगी धातु का आयतन 176 घन सेमी0 हो तो बेलन के बाह्य तथा आन्तरिक व्यास ज्ञात कीजिए।

44. एक खिलौना ऐसे लंब वृतीय बेलन के आकार का है जिसके एक ओर अर्धवृताकार तथा दूसरी ओर एक शंक्वाकार भाग है। बेलनाकार भाग की त्रिज्या तथा ऊंचाई क्रमशः 5 cm और 13 cm है। अर्धगोलाकार और शंक्वाकार भाग की त्रिज्याएं बेलनाकार भाग की त्रिज्या के समान है। यदि खिलौने की कुल ऊंचाई 30 cm हो, तो इसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

45. एक खोखले शंकु को उसको आधार के समांतर एक तल से काटा जाता है और उसका ऊपरी भाग हटा दिया जाता है। यदि शेष भाग का व्रक पृष्ठ संपूर्ण शंकु के व्रक पृष्ठ का $\frac{8}{9}$ हो, तो तल के द्वारा काटे गए शंकु की ऊंचाई के दो भागों में अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

1. बेलन, छिन्नक

2. बेलन, गोला

3. बेलन, शंकु

4. छिन्नक

5. अर्ध–गोला, छिन्नक

6. शंकु, सिरों वाला बेलन

7. अर्धगोला, शंकु

8. अपरिवर्तित

9. वृत

10. 462 cm^2

11. 16:25

12. $2r$ cm

13. 3:1

14. $2r$ इकाई

15. $3\pi r^2$

16. 3 इकाई

17. 3:1:2

18. $4\pi r^2$

19. 11 cm

20. आयतन

21. 240

22. 9 cm

23. 160 cm^2

24. 1 cm

25. 32706.6 cm^3 लगभग

26. 15 m

27. 600 cm^2

28. 2:3

29. व्रक पृष्ठीय क्षेत्रफल 2310 cm^2
कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल 3696 cm^2

30. 15 cm

31. 6 सेमी0, 8 सेमी0, 10सेमी

32. 5 सेमी0

33. 7 : 1, 1 : 7

34. 18480 cm^3

35. 350.592 cm^2

36. h = 6 सेमी0, रु 770

37. 583 cm^2

38. 4 सेमी0

39. 218.064 cm^3

40. 82720 रुपये

41. 2.5 cm

42. 10

43. 5cm, 3cm

44. 770 cm^2

45. 1 : 2

अभ्यास प्रश्न–प्रत्र

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

समय : 50 मिनट *अंक : 20*

खण्ड–अ

1. ठोस अर्ध–गोले के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र लिखिए। **1**

2. ''कीप'' किन दो ज्यामितीय आकारों का संयोजन है। **1**

खण्ड–ब

3. उस बेलनाकार टैंक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी ऊंचाई 2 मीटर व त्रिज्या 3.5 मीटर है। **2**

4. बाल्टी के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र लिखिए (संकेत : बाल्टी छिन्नक के रूप में है) **2**

खण्ड–स

5. उस सबसे बड़े शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए जिसे 4.2 cm भुजा वाले घन से काटा जा सकता है। **3**

6. छिन्नक का आयतन ज्ञात कीजिए यदि इसकी ऊंचाई 4 मीटर हो व दोनों सिरों की त्रिज्याएं 7 मीटर व 4 मीटर है। **3**

खण्ड–द

7. सिद्ध कीजिए कि समान आधार त्रिज्याएं व समान ऊंचाई वाले एक बेलन, एक शंकु और एक अर्ध–गोले का आयतन 3 : 1 : 2 होता है। **4**

8. 40 cm व 30 cm भुजा वाले दो घनों (ठोस) को पिघलाकर 5824 एक जैसे घन (ठोस) बनाए गए हैं। नए बने घनों की भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए। **4**

❐❐❐