2
अध्याय

बहुपद

प्रमुख बिंदु

1. यदि x एक चर है, n एक प्राकृत संख्या है और $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots a_n$ वास्तविक संख्याएं हैं, तो $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0, (a_n \neq 0)$ चर x में एक बहुपद कहलाता है।

2. 1, 2 तथा 3 घातांक वाले बहुपद क्रमशः रैखिक, द्विघात एवं त्रिघात बहुपद कहलाते हैं।

3. एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के रूप का बीजीय व्यंजक होता है जबकि a, b तथा c वास्तविक संख्याएं हैं तथा $a \neq 0$.

4. बहुपद के शून्यक उन बिंदुओं के x – निर्देशांक हैं जिन पर $y = p(x)$ का आलेख (GRAPH) x–अक्ष को प्रतिच्छेद करता है। अर्थात् $x = a$, बहुपद $p(x)$ का शून्यक होगा यदि $p(a) = 0$

5. बहुपद के अधिकतम शून्यक उतने हो सकते हैं जितनी बहुपद की घात है।

6. (*i*) यदि बहुपद $p(x)$ का एक शून्यक दूसरे का योज्य प्रतिलोम हो तो x का गुणांक $= 0$

(*ii*) यदि बहुपद $p(x)$ के शून्यक एक–दूसरे के गुणन प्रतिलोम हो तो, x^2 का गुणांक = अचर पद

7. **बहुपद के शून्यकों ओर गुणांकों में संबंध–**

यदि α, β द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ के शून्यक हो, तो

$\alpha + \beta =$ शून्यकों का योग $= -\dfrac{b}{a}$

$\alpha\beta =$ शून्यकों का गुणनफल $= \dfrac{c}{a}$

8. यदि α, β किसी द्विघात बहुपद के शून्यक हो, तो बहुपद

$p(x) = k\,[x^2 -$ (शून्यकों का योग) $x +$ शून्यकों का गुणनफल]

जहाँ k कोई वास्तविक संख्या है तथा $k \neq 0$

9. रैखिक बहुपद $p(x) = ax + b$ का आलेख एक सरल रेखा होती है।

10. **विभाजन एल्गोरिथ्म**–किंही दो बहुपदों $p(x)$ तथा $g(x)$ के लिए अन्य दो बहुपदों $q(x)$ तथा $r(x)$ का अस्तित्व इस प्रकार है:

$p(x) = g(x).\ q(x) + r(x)$; जबकि $g(x) \neq 0$ तथा $r(x) = 0$ या घातांक $r(x) <$ घातांक $g(x)$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. उस रैखिक बहुपद के शून्यकों की संख्या क्या होगी जिसका आलेख (ग्राफ):
(*i*) मूल बिंदु से गुजरता हो (*ii*) x-अक्ष को किसी भी बिंदु पर स्पर्श या प्रतिच्छेद नहीं करता हो।

2. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यक $\left(5+2\sqrt{3}\right)$ और $\left(5-2\sqrt{3}\right)$ हो।

3. यदि $4x^2 - (8k^2 - 40k)\,x - 9$ का एक शून्यक दूसरे शून्यक का योज्य प्रतिलोम हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

4. $P(x) = x^2 - 5x + 4$ में क्या जोड़ा जाए ताकि प्राप्त बहुपद का एक शून्यक 3 हो।

5. एक द्विघात बहुपद के (*i*) अधिकतम (*ii*) न्यूनतम कितने शून्यक हो सकते हैं?

6. बहुपद $x^2 + 1$ के वास्तविक शून्यकों की संख्या क्या होगी?

7. यदि $6x^2 - 7x - 3$ के शून्यक α और β हो तो एक द्विघात बहुपद बनाइए जिसके शून्यक 2α और 2β हो।

8. यदि $4x^2 - 17x + k - 4$ के शून्यक α और $\frac{1}{\alpha}$ हो, तो k का मान क्या होगा?

9. उन बहुपदों के शून्यकों की संख्या क्या होगी जिनका आलेख (*i*) y-अक्ष (ii) x-अक्ष के समांतर हो।

10. उन बहपदों के शून्यकों की संख्या क्या होगी जिनका आलेख अक्षों को केवल निम्नलिखित बिंदुओं पर स्पर्श या प्रतिच्छेद करता है:
(*i*) (–3, 0), (0, 2) और (3, 0) (*ii*) (0, 4), (0, 0) और (0, –4)

लघु उत्तरीय प्रश्न (प्रकार 1)

11. यदि $(k-1)x^2 + k\,x + 1$ का एक शून्यक -3 हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

12. यदि $ax^2 - 6x - 6$ के शून्यकों का गुणनफल 4 हो, तो a का मान ज्ञात कीजिए और उससे शून्यकों का योग ज्ञात कीजिए।

13. यदि बहुपद $x^2 - a(x+1) - b$ के शून्यक α और β इस प्रकार हों कि $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 0$, तो b का मान ज्ञात करो।

14. यदि $x^2 - kx + 6$ के शून्यक 3 : 2 के अनुपात में हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

15. यदि द्विघात बहुपद $(k^2 + k)x^2 + 68x + 6k$ का एक शून्यक दूसरे शून्यक का गुणन प्रतिलोम हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

16. यदि α और β बहुपद $x^2 - 5x + m$ के शून्यक इस प्रकार से हो कि $\alpha - \beta = 1$, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

17. यदि $x^2 - 8x + k$ के शून्यकों के वर्गों का योग 40 हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

18. यदि α और β बहुपद $t^2 - t - 4$ के शून्यक हों तो एक द्विघात बहुपद बनाइए जिसके शून्यक $\frac{1}{\alpha}$ और $\frac{1}{\beta}$ हो।

लघु उत्तरीय प्रश्न (प्रकार 2)

19. यदि $y^2 + 2y - 15$ और $y^3 + a$ में से प्रत्येक का एक गुणनखंड $(k + y)$ हो, तो k और a के मान ज्ञात कीजिए।

20. बहुपद $4\sqrt{3}\,x^2 + 5x - 2\sqrt{3}$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और इसके शून्यकों और गुणाकों में संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

21. यदि $x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 12x + 18$ को $(x^2 + 5)$ से भाग करने पर शेषफल $= (px + q)$ प्राप्त हो तो p व q के मान ज्ञात कीजिए।

22. $2x^2 + px - 15$ का एक शून्यक -5 है। $p(x^2 + x) + k$ के शून्यक परस्पर समान हैं। k का मान ज्ञात कीजिए।

23. यदि बहुपद $3x^2 + 2\kappa x + x - k - 5$ के शून्यकों का योग उनके गुणन का आधा हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

24. यदि $y^2 + 5y + m$ के शून्यक α और β हों तो m का मान ज्ञात कीजिए ताकि $(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = 24$

25. यदि $x^2 - x - 2$ के शून्यक α और β हों, तो एक बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यक $(2\alpha + 1)$ और $(2\beta + 1)$ हों।

26. a और b के मान ज्ञात कीजिए ताकि बहुपद $x^4 + x^3 + 8x^2 + ax + b$, $x^2 + 1$ से पूर्णतया विभाजित हो जाए।

27. $8x^4 + 14x^3 - 2x^2 + 7x - 8$ में से क्या घटाया जाए ताकि प्राप्त बहुपद $4x^2 + 3x - 2$ से पूर्णतया विभाजित हो जाए?

28. $4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ में क्या जोड़ा जाए ताकि प्राप्त बहुपद $x^2 - 2x - 3$ से पूर्णतया विभाजित हो जाए?

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

29. यदि $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ के दो शून्यक $\sqrt{3}$ और $-\sqrt{3}$ हों, तो इसके सभी शून्यक लिखिए।

30. यदि $6x^3 + \sqrt{2}\,x^2 - 10x - 4\sqrt{2}$ का एक शून्यक $\sqrt{2}$ हो, तो इसके अन्य शून्यक ज्ञात कीजिए।

31. यदि $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138\,x - 35$ के दो शून्यक $(2 \pm \sqrt{3})$ हो, तो अन्य शून्यक ज्ञात कीजिए।

32. $x^3 - 5x^2 + 6x - 4$ को बहुपद $g(x)$, से भाग देने पर भागफल और शेषफल क्रमशः $(x-3)$ और $(-3x + 5)$ हैं। $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

33. यदि $x^3 + x^2 - 3x - 3$ के दो शून्यको का योग और गुणन क्रमशः 0 और 3 हो तो इस बहुपद के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए।

34. यदि $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ का एक शून्यक $-\frac{1}{2}$ हो, तो इसके अन्य दो शून्यकों का योग तथा गुणन ज्ञात कीजिए।

35. बहुपद $2x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 3x + 6$ के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए, यदि इसके दो गुणनखंड $\left(x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ हो।

36. $p(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 36x - 9$ के दो शून्यकों का योग और गुणनफल क्रमशः 0 और -9 है। $p(x)$ के अन्य दो शून्श्कों का योग और गुणनफल ज्ञात कीजिए।

37. एक व्यक्ति कुछ जरूरतमंद विद्यार्थिक को k पुस्तकें वितरित करता है। यदि k, बहुपद $x^2 - 100x - 20000$ का एक शून्यक हो, तो

(*i*) व्यक्ति द्वारा वितरित पुस्तकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

38. $x^3 - 12x^2 + 47x - 60$ का एक शून्यक 3 है तथा अन्य दो शून्यक विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए पेड़ों की संख्या हैं।

(*i*) दोनों विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए पेड़ों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

1. (i) 1 (ii) 0

2. $x^2 - 10x + 13$

3. $k = 0, 5$

4. 2

5. (i) 2 (ii) 0

6. 0

7. $3x^2 - 7x - 6$

8. $k = 8$

9. (i) 1 (ii) 0

10. (i) 2 (ii) 1

11. $\frac{4}{3}$

12. $a = -\frac{3}{2}$, शून्यकों का योग $= -4$

13. 1

14. $-5, 5$

15. 5

16. 6

17. 12

18. $4t^2 + t - 1$

19. $k = 3, -5$ और $a = 27, -127$

20. $-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{4}$

21. $p = 2, q = 3$

22. $\frac{7}{4}$

23. 1

24. 1

25. $x^2 - 4x - 5$

26. $a = 1$, $b = 7$

27. $14x - 10$

28. $61x - 65$

29. $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\frac{1}{2}$

30. $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

31. $-5, 7$

32. $x^2 - 2x + 3$

33. $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -1$

34. 0, 3

35. $2, -1, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

36. 4, 1

37. (i) 200

38. (i) 9

अभ्यास प्रश्न–प्रत्र

बहुपद

समय : 50 मिनट *अंक : 20*

खंड–अ

1. यदि α और β द्विघात बहुपद $p(x)$, के शून्यक हों,तो $p(x)$ का गुणनखंडन कीजिए। 1

2. यदि $x^2 - x - 1$ के शून्यक α और β हों, तो $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

खंड–ब

3. बहुपद $x^2 - (k+6)x + 2(2k-1)$ के शून्यक α और β हैं। यदि $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\alpha\beta$ हो तो k का मान ज्ञात कीजिए। 2

4. एक द्विघात बहुपद बनाइए जिसका एक शून्यक $(3+\sqrt{2})$ हो और शून्यकों का योग 6 हो। 2

खंड–स

5. a और b के मान ज्ञात कीजिए यदि $(x^2 + 1)$ बहुपद $x^4 + x^3 + 8x^2 + ax + b$ का एक गुणनखंडन हों। 3

6. यदि सच और झूठ बहुपद $px^2 + qx + r, (p \neq 0)$ के शून्यक हों जो एक–दूसरे के व्युत्क्रम हों तों

(*i*) p और r में संबंध ज्ञात कीजिए। 3

खंड–द

7. यदि बहुपद $x^3 + 2x^2 + kx + 7$ को $(x-3)$ से भाग करने पर शेषफल 25 प्राप्त होता हों तो भागफल तथा k का मान ज्ञात कीजिए। इस प्रकार प्राप्त भागफल के शून्यकों का योग और गुणनफल भी ज्ञात कीजिए। 4

8. यदि β और $\frac{1}{\beta}$ बहुपद $(\alpha^2 + \alpha)x^2 + 61x + 6\alpha$ के शून्यक हों तो β और α के मान ज्ञात कीजिए। 4

□□□