4
अध्याय

द्विघात समीकरण

महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ द्विघात समीकरण है, जिसमें a, b, c वास्तविक संख्याऐं है। उदाहरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

2. द्विघात समीकरण के मूल

एक वास्तविक संख्या a को द्विघात समीकरण का मूल कहां जा सकता है यदि $aa^2 + ba + c = 0$

3. मूलों की संख्या–एक द्विघात समीकरण के दो मूल होते हैं।

4.

द्विघात समीकरण हल करने की विधि

- गुणनखंड द्वारा
- पूर्णवर्ग विधि द्वारा
- द्विघात फार्मूले द्वारा

5. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के निम्न मूल हैं

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

6. विविक्तकर किसी द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के लिए विविक्तर $D = b^2 - 4ac$ होता है।

अर्थात $D = b^2 - 4ac$ होने पर द्विघात समीकरण के मूल निम्न है

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

7.

मूलों का स्वभाव

- यदि $D > 0$ हो तो वास्तविक और असमान मूल होंगे।
- यदि $D = 0$ हो तो वास्तविक और समान मूल होंगे।
- यदि $D < 0$ तो अवास्तविक मूल होंगे।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. यदि $-\frac{1}{2}$ द्विघात समीकरण $2x^2 + kx + 1 = 0$ का मूल हो तो k ज्ञात करें।

2. द्विघात समीकरण $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ के मूल किस प्रकार के होंगे?

3. क्या समीकरण $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$ एक द्विघात समीकरण है?

4. समीकरण $5x^2 - \sqrt{2}x + 3 = 0$ को पूर्ण वर्ग विधि द्वारा हल करने पर कौन सा स्थिरांक जोड़ा या घटाया जाएगा?

5. यदि $x = -1$ और $x = -2$ समीकरण $px^2 + 3x + q = 0$ के मूल हों तो $q - p$ ज्ञात करें।

6. एक द्विघात समीकरण बनाऐं जिसने मूल $\sqrt{2}$ और 1 हों।

7. निम्न के लिए द्विघात समीकरण बनाऐं "दो कमागत सम पूर्णांकों का गुणनफल 1848" है।

8. क्या 0.2, समीकरण $x^2 - 0.4 = 0$ का मूल है?

9. यदि $ax^2 + bx + c$ के मूल बराबर हों तो c को a और b के यप में व्यक्त करें।

10. द्विघात समीकरण $x^2 + 6x - 91 = 0$ को यदि $(x + p)(x + q) = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर p और q क्या होंगे?

लघु उत्तरीय प्रश्न–(1)

11. गुणनखंड विधि द्वारा करें–

(a) $8x^2 - 22x - 21 = 0$

(b) $3\sqrt{5}x^2 + 25x + 10\sqrt{5} = 0$

(c) $\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = 0$

(d) $2x^2 + ax - a^2 = 0$

12. यदि $2x^2 + kx + k = 0$ के मूल वास्तविक और बराबर हों तो k का मान ज्ञात करें।

13. यदि $9x^2 + 3kx + 4 = 0$ के मूल असमान हों तो k का मान ज्ञात करें।

14. p के किस मान के लिए द्विघात समीकरण $x^2 + 5px + 16 = 0$ के अवास्तविक मूल होंगे?

15. c के किस मान के लिए समीकरण $4x^2 - 2x + (c - 4) = 0$ के मूल एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे?

16. p के किस मान के लिए समीकरण px2 + 6x + 4p = 0 के मूलों का गुणनफल और उनका योग बराबर होगा?

17. दो वर्गों की भुजाएं x सेमी और $(x+4)$ सेमी हैं। उनके क्षेत्रफलों का योग 656 वर्ग सेमी हो तो वर्गों की भुजाओं का माप ज्ञात करें।

18. p का मान ज्ञात करें जिसके लिए समीकरण $px+(x-3)+9=0$ के मूल बराबर हों?

19. 16 के दो हिस्सें इस प्रकार करें कि बड़ी संख्या का दुगुना संख्या के वर्ग से 164 अधिक हो।

20. k का मान ज्ञात करें जब समीकरण $x^2-5x+(3k-3)=0$ के मूलों का अंतर 11 हो।

21. दो क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग 313 है। संख्याऐं ज्ञात करें।

लघु उत्तरीय प्रश्न 2

22. निम्न द्विघात समीकरण सरल करें–

(a) $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}, a+b\neq 0$

(b) $\frac{1}{2a+b+2x}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{2x}$

(c) $\frac{2}{x+1}+\frac{2}{2(x-2)}=\frac{23}{5x}, x\neq -1,2,0$

(d) $3\left(\frac{7x+1}{5x-3}\right)-4\left(\frac{5x-3}{7x+1}\right)=11, x\neq \frac{3}{5},\frac{-1}{7}$

(e) $\frac{x-1}{x+2}+\frac{x-3}{x-4}=\frac{10}{3}, x\neq -2,4$

(f) $ax^2+(4a^2-3b)x-12ab=0$

(g) $4x^2-4ax+(a^2-b^2)=0$

(h) $\frac{4}{x}-3=\frac{5}{2x+3}, x\neq 0,-3/2$

23. द्विघात सूत्र का प्रयोग करके समीकरण सरल करें–

$abx^2+(b^2-ac)x-bc=0$

24. यदि $-5, 2x^2+px-15$ का मूल हो और $p(x^2+x)+k=0$ के मूल बराबर हो तो p और k का मान ज्ञात करें।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

25. यदि द्विघात समीकरण $(p+1)x^2 - 6(p+1)x + 3(p+9) = 0$ के मूल बराबर हो तो p का मान ज्ञात करें तथा फिर इस समीकरण के मूल भी ज्ञात करें।

26. k के किस मान के लिए द्विघात समीकरण $(2k+1)x^2 - (7k+2)x + (7k-3) = 0$ के मूल बराबर होंगे? मुल भी ज्ञात करें।

27. यदि द्विघात समीकरण $(1+m^2) + 2mcx + (c^2 - a^2) = 0$ के मुल बराबर हों तो सिद्ध करें $c^2 = a^2(1+m^2)$

28. k के किस मान के लिए $(4-k)x^2 + (2k+4)x + (8k+1) = 0$ एक पूर्ण वर्ग है?

29. बत्तख के समूह के वर्गमूल का $\frac{7}{2}$ गुणा नदी के किनारे खेल रहे थे। शेष दो बत्तख पानी के अंदर खेल रहे थे। बत्तखों की कुल संखा ज्ञात करें।

30. एक मोर 9m उँचे स्तंभ पर बैठा था स्तंभ के तल से 27m दूर एक सांप है जो अपने बिल की तरफ जो अपने बिल की तरफ जो स्तंभ के तल में है आ रहा है।

31. 9000 रू. को कुछ व्यक्तियों में बराबर बांटा गया। यदि 20 व्यक्ति और आ जाऐ तो प्रत्येक व्यक्ति को 160 रू कम प्राप्त होंगे। तो कुल व्यक्ति कितने हैं ज्ञात करें।

32. एक व्यक्ति एक खिलौना 24 रू में बेचता है और उतने प्रतिशत लाभ प्राप्त करता है जितना खिलौने का क्रयमूल्य हो। खिलौने का क्रयमूल्य ज्ञात करें।

33. एक विक्रेता कुछ किताबें 80 रू में खरीदता है। यदि वह 4 किताबें और उसी दाम में खरीदे तो प्रत्येक किताब का मूल्य 1 रू कम हो जाता है। उसने कुल कितनी किताबें खरीदी?

34. दो पाइप एक साथ एक सिर्स्टन को भरने में $3\frac{1}{13}$ मिनट लगाते हैं। यदि एक पाइप इसे भरने में दूसरे पाइप से 3 मिनट ज्यादा ले तो कितने समय में प्रत्येक पाइप इस सिर्स्टन को भरेगा?

35. दो वर्गों के क्षेत्रफलों का योग 400 cm^2 है। यदि उनके परिमापों का अंतर 16 cm हो तो प्रत्येक वर्ग की भुजा का माप ज्ञात करें।

36. एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल 60 cm^2 है। इसकी बराबर भुजाओं की लंबाई 13 cm है तो इस त्रिभुज का आधार ज्ञात करें।

37. एक चैस बोर्ड में 64 बराबर वर्ग हैं और हर वर्ग का क्षेत्रफल 6.25 cm^2 है। इस बोर्ड के चारों तरफ 2 cm चौड़ा बार्डर है। इस चैस बोर्ड की लंबाई ज्ञात करें।

38. एक लड़की की उम्र अपनी बहन से दुगनी है। चार वर्ष पश्चात दोनों की आयु का गुणनफल 160 होगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात करें।

39. एक नाव जिसकी गति शांत जल में 18 किमी/घंटा है जो 24 km किमी धारा के विरुध जाने में और 24 km किमी धारा की दिशा में आने पर 1 घंटा ज्यादा लेती है। धारा की गति ज्ञात करें।

40. एक तेज चलने वाली रेलगाड़ी एक धीरे चलने वाले रेलगाड़ी से 600 km किमी की दूरी तय करने में 3 घंटे कम लेती है। यदि धीमी रेलगाड़ी की गति 10 किमी/घंटा तेजी रेलगाड़ी से कम हो तो दोनों रेलगाड़ी की गति ज्ञात करें।

41. एक भिन्न का अंश, हर, से 3 कम है यदि अंश और हर दोनों ही में 2 जोड़ा जाए तो नए भिन्न और दिए गए भिन्न का जोड़ $\frac{29}{20}$ होगा। दिया गया भिन्न ज्ञात करें।

42. दो प्राकृतिक संख्याओं का अंतर 3 है और उनके व्युत्क्रमों का अंतर $\frac{3}{28}$ है। संख्याऐं ज्ञात करें।

43. तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों में पहली संख्या का वर्ग और अन्य दो संख्याओं का गुणफल जोड़ने पर 46 प्राप्त होता है। पूर्णांक ज्ञात करें।

44. एक दो अंकों की संख्या अपने अंकों के जोड़ से 3 गुना है और अपने अंकों के गुणनफल से तीन गुना है। संख्या ज्ञात करें।

45. एक समकोण त्रिभुजाकार भूमि का कर्ण सबसे छोटी भुजा के दुगुने से 10 मीटर बड़ा है। यदि तीसरी भुजा छोटी भुजा से 7 मीटर बड़ी हो तो भूमी की तीनों भुजाऐं ज्ञात करें।

46. एक कक्षा परीक्षा में p के गणित और विज्ञान में प्राप्त अंकों का जोड़ 28 है। यदि वह गणित में 3 अंक और प्राप्त करता है और विज्ञान में 4 अंक कम प्राप्त करता है तो उसके अंकों का गुणनफल 180 होता। उसके दोनों विषयों में प्राप्त अंक ज्ञात करें।

47. एक कपड़ा 200 रू का है। यदि कपड़े की लम्बाई 5 मी. अधिक होती और प्रति मीटर कपड़े का मूल्य 2 रू कम होता तो भी कपड़े का कुल मूल्य वही रहता। कपड़े की लंबाई और प्रति मीटर कपड़े का मूल्य ज्ञात करें।

48. एक हवाई जहाज अपने नियमित समय से 30 मिनट देर से चलता है। अपने गतव्य स्थान जो कि 1500 किमी दूर है पर समय से पहुँचने के लिए उसे अपनी गति 250 किमी/घंटा बढ़ानी पड़ती है। हवाई जहाज की वास्तविक गति ज्ञात करें।

49. यदि पहले n सम प्रकृतिक संख्याओं का योग 420 है। n का मान ज्ञात करो।

50. एक हवाई जहाज पर चढ़ते हुए एक आदमी को चोट लग जाती है। पायलट शीघ्रता से उसे अस्पताल पहुँचाने की व्यवस्था करता है। इसलिए हवाई जहाज 30 मिनट देर से चलता है। अपने गतव्य स्थान जो कि 1500 किमी दूर है पर समय से पहुँचने के लिए पायलट को गति 100 किमी/घंटा बढ़ानी पड़ती है। हवाई जहाज की वास्तविक गति ज्ञात करें।

51. A एक काम को पूरा करने में B से 10 दिन कम लेता है। A और B मिलकर उसी काम को 12 दिनों में पूरा करते हैं। B द्वारा अकेले उस काम को पूरा करने में कितना समय लगेगा?

उत्तरमाला

1. $k = 3$

2. बराबर मूल

3. हाँ

4. $\frac{2}{100}$ या $\frac{1}{50}$

5. 1

6. $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} = 0$

7. $x^2 + 2x - 1848 = 0$

8. नहीं

9. $c = \frac{b^2}{4a}$

10. 13 – 7

11. (a) $x = \frac{7}{2}, x = \frac{-3}{4}$

(b) $x = \sqrt{5}, x = -\frac{2\sqrt{5}}{3}$

(c) $x = \sqrt{6}, x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

(d) $x = \frac{a}{2}, x = -a$

13. $k > 4, k < -4$

14. $-\frac{8}{5} < p < \frac{8}{5}$

15. $c = 8$

16. $p = \frac{-3}{2}$

17. 16 cm, 20 cm

18. $p \neq 0\ p = 4$

19. $x = 10, 6$

20. $k = -7$

21. 12, 13

22. (a) $x = -a, x = -b$

23. $x = \frac{c}{b}, \frac{-b}{a}$

(b) $x = -a, x = -\frac{b}{2}$

24. $p = 7, p = \frac{7}{4}$

(c) $x = 4, x = -\frac{23}{11}$

25. $p = 3, x = 3, 3$

(d) $x = 0, x = 1$

26. $k = 4, \frac{-4}{7}$

(e) $x = \frac{1 \pm \sqrt{297}}{4}$

(f) $x = \frac{3b}{a}, x = -4a$

(g) $x = \frac{a+b}{a}, x = \frac{a-b}{2}$

(h) $x = -2, x = 1$

28. $k = 0, 3$

29. 16

30. 12 m

31. 25

32. 20 रू

33. 16

34. 5 मिनट, 8 मिनट

35. 12, 16

36. 24 सेमी या 10 सेमी

37. 24 सेमी

38. 6 वर्ष, 12 वर्ष

39. 6 किमी / घंटा

40. 40 किमी / घंटा
50 किमी / घंटा

41. $\frac{7}{10}$

42. 7, 4

43. 4, 5, 6

44. 24

45. 8 मी. 17 मी. 15 मी.

46. गणित में अंक 12
विज्ञान में अंक 16

47. लम्बाई 20 मी.
दर = 10 रू / मी.

48. 750 किमी / घंटा

49. $n = 20$

50. 500 किमी / घंटा

51. 30 दिन।

अभ्यास प्रश्न–प्रत्र

द्विघात समीकरण

समय : 50 मिनट *अंक : 20*

खण्ड–अ

1. यदि समीकरण $6x^2 - bx + 2 = 0$ का विविक्तकर 1 हो तो b का मान ज्ञात करें। **1**

2. $x^2 + 5x - 300 = 0$ में x का मान ज्ञात करें

खण्ड–ब

3. यदि $kx^2 - 2kx + 6 = 0$ के मूल बराबर हों तो k का मान ज्ञात करें। **2**

4. यदि $x^2 + px + 12 = 0$ के मूल $1 : 3$ में हो तो p का मान ज्ञात करें। **2**

खण्ड–स

5. द्विघात समीकरण सरल करें– **3**

$(x - 1)^2 - 5(x - 1) - 6 = 0$

6. k का मान ज्ञात करें यदि समीकरण $x^2 - 5x + 3(k - 1) = 0$ के मूलों का अंतर 11 हो। **3**

खण्ड–द

7. यदि द्विघात समीकरण $(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$ के मूल बराबर हो तो सिद्ध करें $2b = a + c$ **4**

8. दो प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग 52 है। यदि पहली संख्या दूसरी संख्या के दुगुने से 8 कम है तो संख्याएं ज्ञात करें। **4**

□□□