उदाहरण-1

∵ 12576 > 4052 है।

∴ यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम से,

अर्थात्, $a = bq + r$

या, $12576 = 4052 \times 3 + 420$ (भाजक = 4052, शे० = 420)

या, $4052 = 420 \times 9 + 272$ (भाजक = 420, " = 272)

अर्थात्, $420 = 272 \times 1 + 148$ (" = 272, " = 148)

अर्थात्, $272 = 148 \times 1 + 124$ (" = 148, " = 124)

या, $148 = 124 \times 1 + 24$ (" = 124, " = 24)

या, $124 = 24 \times 5 + 4$ (" = 24, " = 4)

अर्थात्, $24 = 4 \times 6 + 0$ (" = 4, " = 0)

∵ शेषफल = 0

∴ HCF (4052, 12576) = 4 है। Ans

उदाहरण-2

माना कि धनात्मक पूर्णांक सं० = a है।

माना कि $b = 2$ क्योंकि संख्या का रूप $2q$ या $2q+1$ है।

∴ यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम से,

$a = bq + r$

या, $a = 2q + r$ ——— (i) जहाँ r = पूर्णांक सं० है।

∴ r के संभावित मान = 0, 1.

Scanned by CamScanner

यदि $r = 0$ तो समी० (1) से,

$a = 2q + 0$

या, $a = 2q$

या, a = सम संख्या × पूर्णांक सं०

= सम संख्या

यदि $r = 1$ तो समी० (1) से,

$a = 2q + 1$

या, a = सम सं० + 1

= विषम संख्या

अतः धनात्मक सम संख्या का $2q$ और धनात्मक विषम संख्या का रूप $2q+1$ होता है।

उदाहरण-3 माना कि धनात्मक संख्या a है।
माना कि $b = 4$ इसलिए संख्या का रूप $4q+1$ या $4q+3$ है।

∴ यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$a = bq + r$

या, $a = 4q + r$ ——— (1) (जहाँ r = पूर्णांक है)

∴ r के संभावित मान 0, 1, 2, 3,

यदि $r = 0$ तो समी० (1) से,

$a = 4q + 0$

या, $a = 4q$

$= 2(2q)$ = सम संख्या

Scanned by CamScanner

यदि $r = 1$ तो समी० (i) से,

$a = 4q + 1$

या, a = सम संख्या + 1

= विषम संख्या

यदि $r = 2$ तो समी० (i) से,

$a = 4q + 2$

या, a = सम संख्या + 2

= सम संख्या

यदि $r = 3$ तो समी० (i) से,

$a = 4q + 3$

या, a = सम संख्या + 3

= विषम संख्या

अतः कोई धनात्मक सम पूर्णांक $4q$ और $4q+2$ के रूप का होता है।

उदाहरण – 4 420 और 130 का HCF ज्ञात करें

$\because 420 > 130$

∴ यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से

या, $140 = 130 \times 3 + 30$ (भाजक = 130, शेषफल = 30)

या, $130 = 30 \times 4 + 10$ (" = 30, " = 10)

या, $30 = 10 \times 3 + 0$ (" = 10, " = 0)

∴ (420, 130) का HCF = 10 है।

अतः बच्चियों के लिए मिठाई विभाजित 10 की ढेरी बना सकती है।

Scanned by CamScanner

Ex - 1.1

1 (i) 135 और 225

∵ $135 < 225$

∴ यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

या, $a = bq + r$

या, $225 = 135 \times 1 + 90$ (भाजक = 135, शेषफल = 90)

या, $135 = 90 \times 1 + 45$ (" = 90 " " = 45)

या, $90 = 45 \times 2 + 0$ (" = 45, " = 0)

∵ शेषफल = 0

∴ (135, 225) का HCF = 45 है।

(ii) 196 और 38220

∵ $196 < 38220$

∴ यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

⇒ $a = bq + r$

⇒ $38220 = 196 \times 195 + 0$ (भाजक = 196, शे० = 0)

∵ शेषफल = 0

∴ (196, 38220) का स० स० = 196 है।

(iii) 867 और 255

∵ $867 > 255$

∴ यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

⇒ $a = bq + r$

⇒ $867 = 255 \times 3 + 102$ (भाजक = 255, शे० = 102)

⇒ $255 = 102 \times 2 + 51$ (" = 102, " = 51)

⇒ $102 = 51 \times 2 + 0$ (" = 51, " = 0)

∵ शेषफल = 0

∴ (867, 255) का HCF = 51

Scanned by CamScanner

(2) माना कि धनात्मक संख्या a है।
माना कि $b = 6$ क्योंकि संख्या का रूप
$6q+1$ या, $6q+3$, या $6q+5$ है।

∴ यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,
$a = bq + r$
or, $a = 6q + r$ ——— (i) (जहाँ r धनात्मक पूर्णांक संख्या)

∴ r के संभावित मान 0, 1, 2, 3, 4, 5
यदि $r = 0$ तो समी० (i) से,
$a = 6q + 0$
or, $a = 6q$
or, $a = 2(3q) =$ (सम सं० × विषम संख्या)
= सम संख्या
यदि $r = 1$ तो समी० (i) से,
$a = 6q + 1$
= सम संख्या + 1 = विषम संख्या
यदि $r = 2$ तो समी० (i) से
$a = 6q + 2$
= सम सं० + सम संख्या = सम सं०
यदि $r = 3$ तो समी० (i) से
$a = 6q + 3$
= सम सं० + 3
= विषम संख्या

Scanned by CamScanner

यदि $r = 4$ तो समी० (i) से,

$a = 6q + 4$

$= 2(3q + 2)$

$= 2m$ (जहाँ $m = 3q + 2$)

$=$ सम संख्या

यदि $r = 5$ तो समी० (i) से,

$a = 6q + 5$

$= 2(3q + 2) + 1$

$= 2m + 1$ (जहाँ $m = 3q + 2$)

$=$ विषम संख्या

अतः विषम संख्या का रूप $6q+1$ या, $6q+3$, या, $6q+5$ होता है।

(3) Sol^n: → सोना की दुकानों की संख्या = 616

चाँदी में सोना की संख्या = 32

∵ दोनों प्रकार की सं० से स्तंभ बनाना है।

इसके लिए दोनों संख्या का HCF ज्ञात करेंगे।

∵ $616 > 32$

∴ यूक्लिड विभाजित एल्गोरिथ्म से,

$616 = 32 \times 19 + 8$ (भाजक = 32, शे० = 8)

$32 = 8 \times 4 + 0$ (" = 8 , " = 0)

अतः अधिकतम स्तंभ की संख्या = 8

(4) Sol^n: → माना एक धनात्मक पूर्णांक = a है।

∵ $b = 2$ क्योंकि सं० का रूप

$2m$ या $2m + 1$ है।

∴ यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

Scanned by CamScanner

$a = bq + r$

or, $a = 3m + r$ ——— (ii) (जहाँ r = पूर्णांक संख्या)

$\therefore r$ के संभावित मान 0, 1, 2

यदि $r = 0$ तो समी० (i) से

$a = 3q + 0$

or, $a = 3q$

Squaring both on the sides.

or, $a^2 = (3q)^2$

or, $a^2 = 3(3q^2)$ | $\because 3q^2$ पूर्णांक है
$\therefore 3q^2 = m$
क्योंकि m भी पूर्णांक है

or, $a^2 = 3m$

यदि $r = 1$ तो समी० (i) से

or, $a = 3q + 1$

Squaring both on the sides.

or, $(a)^2 = (3q+1)^2$

or, $a^2 = (3q)^2 + 2 \cdot 3q \cdot 1 + 1^2$

or, $a^2 = 9q^2 + 6q + 1$

or, $a^2 = 3(3q^2 + 2q) + 1$ | $\because 3q^2 + 2q$ पूर्णांक है
$\therefore 3q^2 + 2q = m$
क्योंकि m भी पूर्णांक है

or, $a^2 = 3m + 1$

अतः घनाकार पूर्णांक का वर्ग $3m$ या $3m+1$ के रूप का होता है।

(5) Sol^n: → माना कि घनाकार पूर्णांक a है।

$\therefore b = 9$ क्योंकि सं० का रूप $9m$ या $9m+1$ या $9m+8$ है।

Scanned by CamScanner

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम से,

$a = bq + r$

or, $a = 3q + r$ — (i) (जहाँ r = पूर्णांक संख्या)

∴ r के संभावित मान 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

यदि $r = 0$ तो समी० (i) से

$a = bq + r$

or, $a = 3q + 0$

or, $a = 3q$

Cubing both on the side.

or, $a^3 = (3q)^3$

or, $a^3 = 3 \times 3 \times 3q^3$

or, $a^3 = 3(9q^3)$

∴ $9q^3$ पूर्णांक है।

∴ $9q^3 = m$ क्योंकि m भी पूर्णांक है।

अतः $a^3 = 3m$

यदि $r = 1$ तो समी० (i) से

$a = 3q + 1$

Cubing both on the sides.

or, $a^3 = (3q+1)^3$

or, $a^3 = (3q)^3 + (1)^3 + 3(3q)^2 1 + 3 \cdot 3q \cdot (1)^2$

or, $a^3 = (3q)^3 + (1)^3 + 27q^2 + 9q$

or, $a^3 = 3[q^3 + 3q^2 + q] + 1$

∴ $9q^3 + 27q^2 + 9q$ एक पूर्णांक है।

∴ $9q^3 + 27q^2 + 9q = m$ क्योंकि m भी एक पूर्णांक है।

Scanned by CamScanner

अब, $a^3 = 9m + 1$

यदि $b = 2$ तो समी० (i) से

$a = 9q + 2$

(cubing both on the sides

or, $(a)^3 = (9q+2)^3$

or, $a^3 = (9q)^3 + (2)^3 + 3\cdot(9q)^2\cdot 1 + 3\cdot 9q\cdot(2)^2$

or, $a^3 = 9[81q^3 + 54q^2 + 12q] + 8$

$\therefore 81q^3 + 54q^2 + 12q = m$ क्योंकि m भी पूर्णांक है।

अब, $a^3 = 9m + 8$

अतः धनात्मक पूर्णांक का घन $9m$ या $9m+1$ या $9m+8$ के रूप का होता है।

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय
~~आधारभूत~~

(Fundamental theorem of Arithmetic)

(1) अंकगणित की आधारभूत प्रमेय :→ अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का संबंध दो या दो से अधिक धनात्मक संख्याओं का गुणज से है।

(2) कथन :→ प्रत्येक भाज्य संख्याओं को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के घातों के रूप में लिखा जाता है।

Scanned by CamScanner