अध्याय : → २ / बहुपद (Polynomials)

(i) चर (Variable) : → वह गुण या विशेषताएँ जिसकी मात्रा बदलती रहती है / जैसे : पेड़ की लम्बाई, जनसंख्या में वृद्धि, विभिन्न त्रिज्या की वृत्त etc.
चर को अंग्रेजी अक्षर x, y, z ... से सूचित किया जाता है /

(ii) अचर (constant) : → वह गुण या विशेषताएँ जो किसी परिस्थिति में नहीं बदलती है, उसे अचर कहा जाता है / जैसे : → वर्ष का परिमाण = 12 महीने, मूल में 4 अचर है / कर्णवृत्त 4 की किसी परिस्थिति में नहीं बदलती है /

(iii) बीजीय व्यंजक (Algebraic Expression) → जब किसी गणितीय कथन को चर और अचर के रूप में लिखा जाता है, तब उसे बीजीय व्यंजक कहा जाता है /
कथन : → मोहन श्याम से पाँच वर्ष बड़ा है
माना कि श्याम की आयु = x वर्ष
∴ मोहन की आयु = (x+5) (बीजीय व्यंजक)

(iv) बहुपद (Polynomials) : → वह बीजीय व्यंजक जिसके चर राशि पर धात पूर्ण संख्या हो तो, उस बीजीय व्यंजक को बहुपद कहा जाता है / जैसे : → $2x^0$, $3x^5$

Note :→ यदि कोई चर हर में हो तो उसे अंश में बदलें, यदि अंश में बदलने पर चर की घात पूर्ण संख्या हो तो वह बहुपद होगा।

(i) $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

(ii) $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

(V.) घात के आधार पर बहुपद के प्रकार :→

(i) अचर बहुपद :→ वह बहुपद जिसके चर राशि पर घात 0 हो, तो उसे अचर बहुपद कहते हैं। इसमें वास्तविक संख्याएँ अचर बहुपद होती हैं।

जैसे :→ $2 = 2 \times x^0$

(ii) रैखिक बहुपद (linear polynomials) :→ वह बहुपद जिसके चर राशि पर घात 1 हो तो, उसे रैखिक बहुपद कहते हैं। इसका व्यापक रूप $ax + b$ होता है। जहाँ a और b वास्तविक संख्या हैं और चर x है।

जैसे :→ $2x$, $-3x + 5$, $2x - 8$

(iii) द्विघात बहुपद (Quadratic polynomials) :→ वह बहुपद जिसके चर राशि पर घात 2 हो, तो उसे द्विघात बहुपद कहते हैं। इसका व्यापक रूप $ax^2 + bx + c$ जहाँ चर x है और a, b और c वास्तविक संख्या है।

रूप $a \neq 0$ / जैसे :→ $2x^2, x^2-2, x^2-3x+2$

(iv) त्रिघात बहुपद (cubic polynomials) :→ वह बहुपद जिसमें चर राशि पर घात 3 हो, तो उसे त्रिघात बहुपद कहते हैं। इसका व्यापक रूप ax^3+bx^2+cx+d होता है जहाँ a, b, c, d वास्तविक संख्याएँ हैं / $a \neq 0$

जैसे :→ $x^3, -3x^3+2x, 5x^3+2x^2+3x+5$

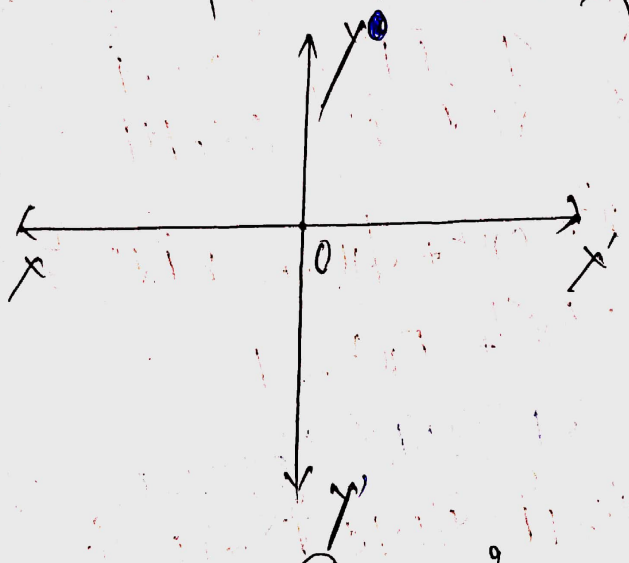
(v) चतुर्घाती बहुपद (Biquadratic polynomials) :→ वह बहुपद जिसमें चर राशि पर घात 4 हो, उसे चतुर्घाती बहुपद कहते हैं / इसका व्यापक रूप $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ होता है / जैसे :→ $x^4, -5x^4+5x^2-1$

(vi) बहुपद की घात (Degree of polynomials) :→ किसी बहुपद में चर के उच्चतम घात को, उस बहुपद की घात कहा जाता है / जैसे :→ $5x^3-2x+3$ की बहुपद की घात 3 है

(vii) गुणांक (coefficient) :→ किसी बहुपद में चर के साथ जो वास्तविक संख्या रूप में रहती है, उसे गुणांक कहते हैं / जैसे :→ $2x^3+2x^2-5x$ में x^3 का गुणांक 2, x^2 का गुणांक -5 है / और x का गुणांक

(viii) शून्य बहुपद (Zero polynomials) :→
वह बहुपद जिसके चर राशि का गुणांक 0 हो, उसे शून्य बहुपद कहा जाता है, और शून्य बहुपद की घात, कुछ भी नहीं होता है, अर्थात् अपरिभाषित होती है/ जैसे :→
$0x^3 + 0x^2 - 0 \cdot x$

(ix) बहुपद का आलेख :→
Working Rule (i) ग्राफ पेपर पर x-अक्ष और y-अक्ष परिक्षेत्र और दोनों रेखाओं को 90° पर परिच्छेद करायेंगे/



(ii) चरअलग मान दो x-अक्ष पर और बहुपद के मान को y-अक्ष पर लेकर बिंदु अंकित करेंगे/
(iii) प्राप्त बिंदुओं को सरल रेखा या मुक्त हस्त (Free hand) से मिलायेंगे/

(x) द्विघात बहुपद का आलेख :→ द्विघात बहुपद का आलेख एक सरल रेखा होती है।

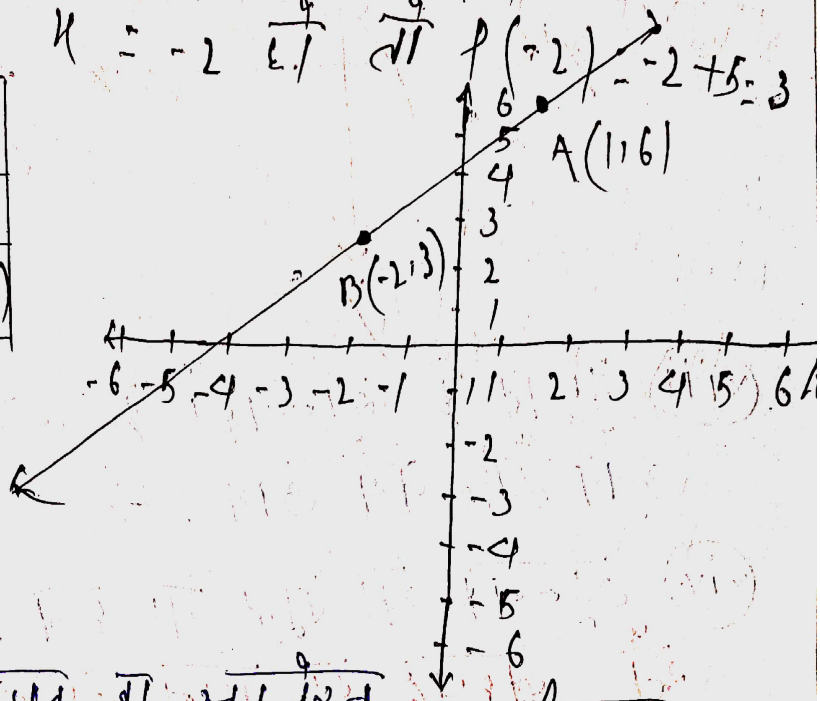
Q. $p(x) = x+5$ का आलेख खींचिए।

यदि $p(x) = x+5$ है तो रेखीय समीकरण

यदि $x = 1$ हो तो $p(1) = 1+5 = 6$

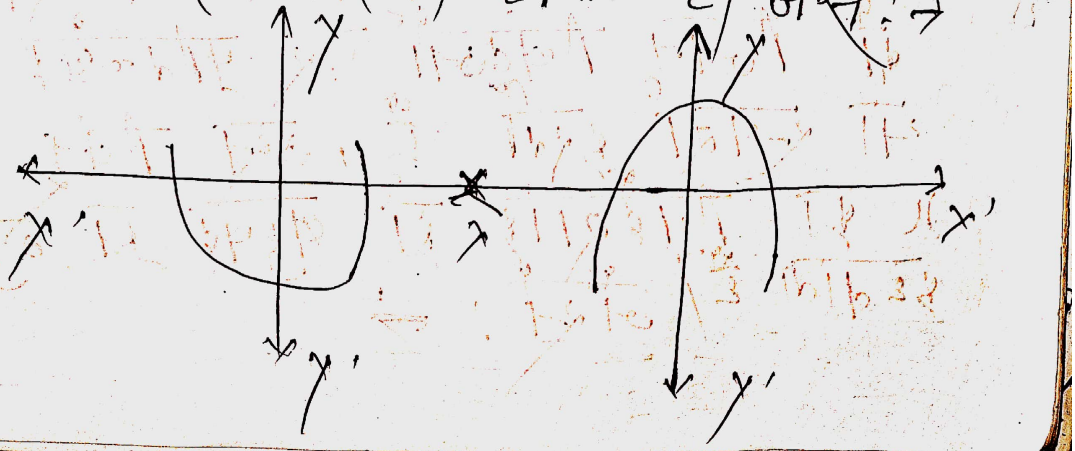
यदि $x = -2$ हो तो $p(-2) = -2+5 = 3$

x	1	-2
$p(x) = y$	6	3
(x, y)	A(1,6)	B(-2,3)

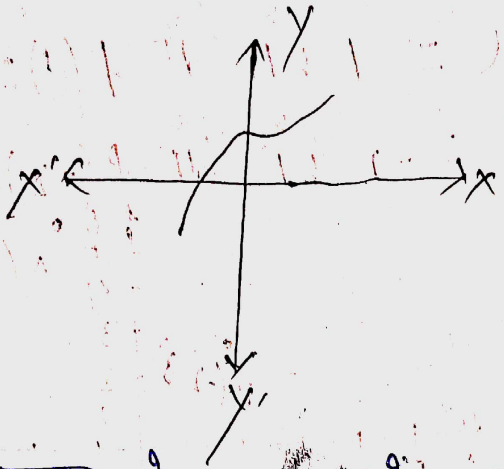


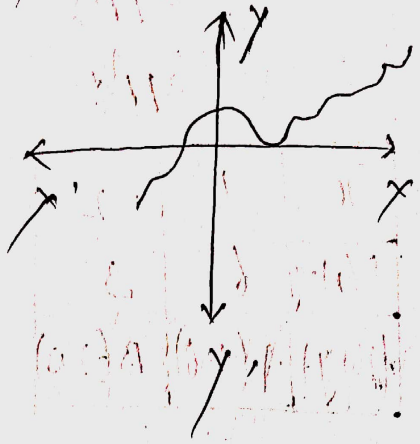
(xi) द्विघात बहुपद का आलेख :→ द्विघात बहुपद का आलेख एक परवलय होती है। परवलय ऊपर की ओर खुला भी हो सकती है या नीचे की ओर भी खुला होता है।

यदि $a > 0$ तो ऊपर की ओर खुला परवलय (∪)। यदि $a < 0$ हो तो नीचे की ओर खुला परवलय (∩) होती है। जैसे :→



(xii) त्रिघात बहुपद का आलेख :→ त्रिघात बहुपद का आलेख कोई निश्चित आकार के नहीं होता है / इसी तरह इसका कोई नाम भी नहीं होता है / जैसे :→





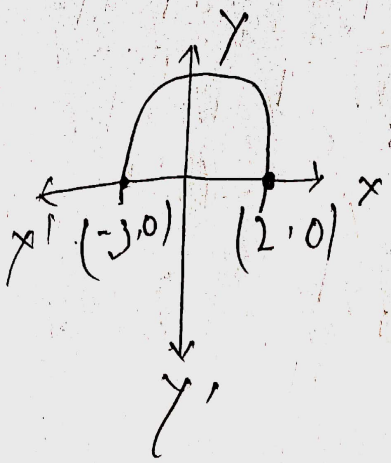
(xiii) बहुपद के शून्यकों का ज्यामीति अर्थ या आलेखीय अर्थ :→

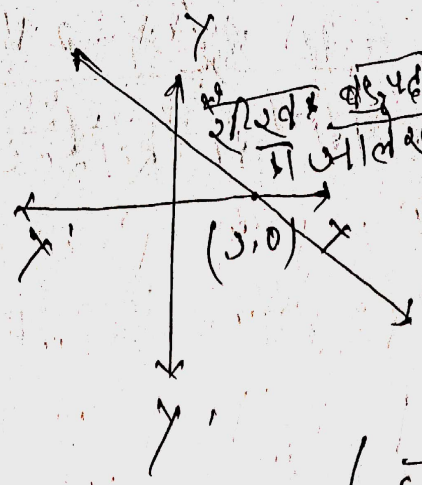
(xiv) शून्यक या मूल या हल :→ चर के विभिन्न से बहुपद का मान शून्य हो जाता है, उस चर के मान को बहुपद का शून्यक कहा जाता है / जैसे :→ $P(x) = x^2 - 1$

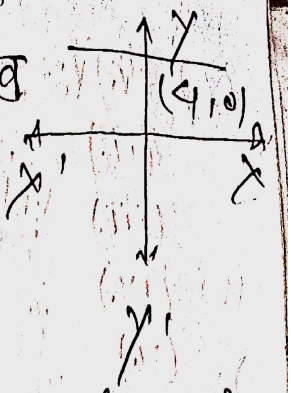
यदि $x = 1$ तो $P(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

यदि $x = -1$ तो $P(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

ज्यामीति अर्थ :→ बहुपद का आलेख x अक्ष को जिन बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है या स्पर्श करती है, उस बिंदु के x का निर्देशांक को बहुपद का शून्यक कहलाता है / जैसे :→







(इस चित्र में शून्यक नहीं होगी क्योंकि x-अक्ष को प्रतिच्छेद नहीं करती है।)

Note :→ वक्र का आलेख x-अक्ष को जितने बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है, उतने बिंदुओं की संख्या वक्र की शून्यकों की संख्या होती है।

उदाहरण :→

(i.) शून्यकों की संख्या 1 है क्योंकि x-अक्ष को केवल एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है।

(ii.) शून्यकों की सं० = 2

(iii.) शून्यकों की सं० = 3

(iv.) शून्यकों की सं० = 1

(v.) शून्यकों की सं० = 1

(vi.) शून्यकों की सं० = 4

Ex - 2.1

(1.) (i) शून्यों की संख्या = 0
(ii) " " " = 1
(iii) " " " = 3
(iv) " " " = 2
(v) " " " = 4
(vi) " " " = 3

* किसी बहुपद के गुणांक (Coefficient of polynomial) :→ किसी भी बहुपद में चर के साथ जो संख्या गुणा के रूप में होती है, उस संख्या को बहुपद का गुणांक कहा जाता है। जैसे :→ $ax+b$ में x का गुणांक a है और अचर पद b है।

* बहुपद का शून्यक ज्ञात करना :→ बहुपद का शून्यक ज्ञात करने के लिए बहुपद को शून्य के बराबर करके चर का मान प्राप्त करेंगे। और यही चर का मान बहुपद का शून्यक होती है। जैसे :→ $2x+5=0$

$\Rightarrow 2x = -5$

$\Rightarrow x = \frac{-5}{2}$

$\therefore x = -\frac{5}{2}$

* द्विघात बहुपद का शून्यक और गुणांक में संबंध :→

रैखिक बहुपद का व्यापक रूप : $ax+b$ होता है

$\therefore ax+b=0$

$\Rightarrow ax=-b$

$\therefore x=\frac{-b}{a}$ अतः शून्यक $=\frac{-\text{अचर पद}}{x \text{ का गुणांक}}$

Q. $2x-5$ का शून्यक ज्ञात कीजिए

Sol: → यहाँ अचर $=-5$

x का गुणांक $=2$

$\therefore$ शून्यक $=\frac{-\text{अचर पद}}{x \text{ का गुणांक}}=\frac{-(-5)}{2}=\frac{5}{2}$

या,

$2x-5=0$

$\Rightarrow 2x=5$

$\therefore x=\frac{5}{2}$

* द्विघात बहुपद का शून्यक एवं गुणांक में संबंध

* द्विघात बहुपद का शून्यक ज्ञात करना :→

Rule :→ (i) a, b, c ज्ञात करें

(ii) ac ज्ञात करेंगे

(iii) ac के युग्मों में संभावित गुणनखंड ज्ञात करेंगे

(iv) यदि ac का चिह्न ऋणात्मक है तो ac के संभावित गुणनखंड का चिह्न b के चिह्न के जैसा होगा

(v) यदि ac का चिह्न ऋणात्मक है तो ac के संभावित गुणनखंड में बड़े

गुणनखंड का चिन्ह b के जैसा होगा और छोटा गुणनखंड का चिन्ह b के विपरीत होगा।
इस प्रकार मध्य पद $b = p + q$ में विभाजित हो जाती है।

Q. $2x^2 - 8x + 6$ का गुणनखंड/मूल/हल ज्ञात करें

Sol:→ यहाँ $a = 2,\ b = -8,\ c = 6$

$\therefore ac = 2 \times 6 = 12$

$\therefore b = -8 = -2 - 6$

$\therefore 2x^2 - 8x + 6 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 6x + 6 = 0$

$\Rightarrow 2x(x-1) - 6(x-1) = 0$

$\Rightarrow (x-1)(2x-6) = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0$ या $2x - 6 = 0$

$\Rightarrow x = 1$ या $2x = 6$

$\Rightarrow x = 1$ या $x = \frac{6}{2}$

$\Rightarrow x = 1$ या $x = 3$

अतः बहुपद का गुणनखंड $(1, 3)$ है।

$12 = -1 \times -12$
$12 = -2 \times -6$
$12 = -3 \times -4$

Q. $4x^2 - 4x + 1$ का शून्यक ज्ञात कीजिए।

Sol:→ $4x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Rightarrow 4x^2 - 2x - 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2x(2x-1) - 1(2x-1) = 0$

$\Rightarrow (2x-1)(2x-1) = 0$

$\Rightarrow 2x - 1 = 0$ या $2x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x = 1$ या $2x = 1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ या $x = \frac{1}{2}$

अतः बहुपद का शून्यक $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ है।

Q $x^2 - 2x - 8$ का शून्यक ज्ञात करें।

Sol:→ $x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 4x - 8 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 4x - 8 = 0$

$\Rightarrow x(x+2) - 4(x+2) = 0$

$\Rightarrow (x+2)(x-4) = 0$

$\Rightarrow x + 2 = 0$ या $x - 4 = 0$

$\Rightarrow x = -2$ या $x = 4$

अतः बहुपद का शून्यक $(-2, 4)$ है।

* द्विघात बहुपद :→ यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ में मध्य पद bx नहीं है तो अर्थात् बहुपद $ax^2 + c$ है तो उसे द्विघात बहुपद का अभाव है। जैसे :→ $2x^2 - 4$

Q. $x^2 - 9$ के शून्यक ज्ञात करें

Sol^{n}: → $x^2 - 9 = (x)^2 - (3)^2 = (x+3)(x-3)$

$= x+3 = 0$ या $x-3 = 0$

$\Rightarrow x = -3$ या $x = 3$

दूसरा तरीका

$x^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 9$

$\Rightarrow x = \sqrt{9}$

$\Rightarrow x = \pm 3$

$\therefore x = -3, x = 3$

Note: → यदि $x = +a$ हो तो $(x-a)$ बहुपद का गुणनखंड होता है।

* प्रमेय: → यदि α (alpha) और β (beta) द्विघात बहुपद के शून्यक हो तो $\alpha + \beta$ (शून्यकों का योग) $= -\frac{b}{a}$ होता है और $\alpha.\beta$ (शून्यकों का गुणनफल) $= \frac{c}{a}$ होता है।

Proof: → $\because \alpha$ और β द्विघात बहुपद ax^2+bx+c के शून्यक है।

$(x-\alpha)$ और $(x-\beta)$ द्विघात बहुपद के गुणनखंड है।

$\Rightarrow ax^2+bx+c = k[(x-\alpha)(x-\beta)]$ जहाँ k अचर संख्या

$\Rightarrow ax^2+bx+c = k[x(x-\beta)-\alpha(x-\beta)]$

$\Rightarrow ax^2+bx+c = k[x^2-x\cdot\beta-x\cdot\alpha+\beta\cdot\alpha]$

$\Rightarrow ax^2+bx+c = k[x^2-x(\beta+\alpha)+\alpha\cdot\beta]$

$\Rightarrow ax^2+bx+c = kx^2-k\cdot x(\alpha+\beta)+k\cdot\beta$

दोनों ओर x^2, x और अचर पद के बराबर रखने पर

$a = k$ ——— (i)

$b = -k(\alpha+\beta)$ ——— (ii)

$c = k\alpha\cdot\beta$ ——— (iii)

समी. (ii) में k का मान रखने पर

$b = -k(\alpha+\beta)$ ——— (ii)

$\Rightarrow b = -a(\alpha+\beta)$

$\Rightarrow \frac{b}{-a} = \alpha+\beta$

$\therefore \boxed{\alpha+\beta = -\frac{b}{a}}$

समी. (iii) में k का मान रखने पर

$c = k\alpha\cdot\beta$

$\Rightarrow c = a\alpha\cdot\beta$

$\Rightarrow \boxed{\alpha\cdot\beta = \frac{c}{a}}$

* त्रिघात बहुपद के शून्यकों का योग, दो-दो शून्यकों का लेकर गुणनफलों का योग और शून्यकों का गुणनफल तथा गुणांकों में संबंध

→ माना कि α, β और γ त्रिघात बहुपद ax^3+bx^2+cx+d के शून्यक हैं।

∴ (i) $\alpha+\beta+\gamma$ (शून्यकों का योग) $= -\frac{b}{a} = \frac{-x^2 \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

(ii) $\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\alpha\cdot\gamma$ (दो-दो शून्यकों को लेकर गुणनफलों का योग)

$= \frac{c}{a} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

(iii) $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$ (शून्यकों का गुणनफल) $= -\frac{d}{a} = \frac{-\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

* द्विघात बहुपद

$= a\left[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\cdot\beta\right]$

जहाँ a हरों का LCM है।

* त्रिघात बहुपद

$= a\left[x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\alpha\cdot\gamma)x-\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\right]$

उदाहरण - 2

$x^2 + 7x + 10 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 5x + 10 = 0$

$\Rightarrow x(x+2) + 5(x+2) = 0$

$\Rightarrow (x+2)(x+5) = 0$

$\Rightarrow x+2 = 0$ या $x+5 = 0$

$\Rightarrow x = -2$ या $x = -5$

अतः बहुपद के शून्यक -2 और -5 हैं।

उदाहरण - 3

Proof: →

शून्यकों का योग $= (-2) + (-5) = -2-5 = -7$

शून्यकों का गुणनफल $= -2 \times -5 = 10$ — (i)

$\because x^2 + 7x + 10$ को $ax^2 + bx + c$ के रूप का है।

$\therefore a = 1, b = 7,$ और $c = 10$

$\therefore$ शून्यकों का योग $(\alpha + \beta) = -\frac{b}{a}$

$\therefore$ शून्यकों का योग $(\alpha + \beta) = -\frac{7}{1} = -7$

पुनः, $\because$ शून्यकों का गुणनफल $\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$ — (ii)

$\therefore$ शून्यकों का गुणनफल $\alpha \cdot \beta = \frac{10}{1} = 10$

अतः स्तंभ (i) और (ii) से शून्यकों का योग और गुणनफल में अभीष्ट संबंध है।

उदाहरण - 3

$\therefore x^2 - 3 = 0$

$\therefore x^2 = \sqrt{3}$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

अतः बहुपद के शून्यक $+\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ है।

Proof :→ शून्यकों का योग $= \sqrt{3} + -\sqrt{3} = 0$

शून्यकों का गुणनफल $= \sqrt{3} \times -\sqrt{3} = -3$ (i)

$\because x^2 - 3$ को $ax^2 + bx + c$ के रूप का है।

$\therefore a = 1, b = 0, c = -3$

$\therefore$ शून्यकों का योग $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a} = \frac{-0}{1} = 0$

" " $(\alpha + \beta) = \frac{-0}{1} = 0$

$\therefore$ शून्यकों का गुणनफल $(\alpha \cdot \beta) = \frac{c}{a}$

" " $(\alpha \cdot \beta) = \frac{-3}{1} = -3$ (ii)

अतः समी० (i) और (ii) से शून्यकों का योग और गुणनफल में अभीष्ट संबंध है।

उदाहरण - 4

माना कि द्विघात बहुपद के शून्यक α और β है।

$\therefore \alpha + \beta = -3$

और $\alpha \cdot \beta = 2$

∴ द्विघात बहुपद $= a[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta]$

∴ द्विघात बहुपद $= a[x^2 - (-3)x + 2]$

$= a[x^2 + 3x + 2]$

$= 1[x^2 + 3x + 2]$ (∵ दिया है LCM $a = 1$)

$= x^2 + 3x + 2$

अतः द्विघात बहुपद $x^2 + 3x + 2$ उत्तर

उदाहरण - 5

∴ $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$

यदि $x = 3$ तो $p(3) = 3\cdot(3)^3 - 5\cdot(3)^2 - 11\cdot 3$

$= 3\cdot 27 - 5\cdot 9 - 33 - 3$

$= 81 - 45 - 33 - 3 = 0$

$= 81 - 81 = 0$

यदि $x = -1$ तो $p(-1) = 3\cdot(-1)^3 - 5\cdot(-1)^2 - 11\cdot -1 - 3$

$= -3 - 5 + 11 - 3$

$= -11 + 11 = 0$

यदि $x = -\frac{1}{3}$ तो $p\left(\frac{-1}{3}\right) = 3\left(\frac{-1}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{-1}{3}\right)^2 - 11\left(\frac{-1}{3}\right) - 3$

$$= 6 \times \frac{-1}{27} - 5 \times \frac{1}{9} + \frac{11}{3} - 3$$

$$= \frac{-1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3$$

$$= \frac{-1 - 5 + 33 - 27}{9}$$

$$= \frac{33 - 33}{9}$$

$$= \frac{0}{9} = 0$$

$x = 3$ या $x = -1$ के लिए $P(x)$ का मान 0 है।

$3, -1$ और $-\frac{1}{3}$, $P(x)$ का शून्यक है।