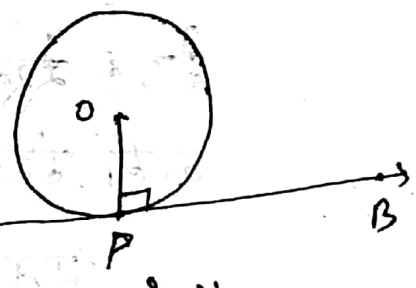
# वृत्त (circle)

स्पर्श रेखा →

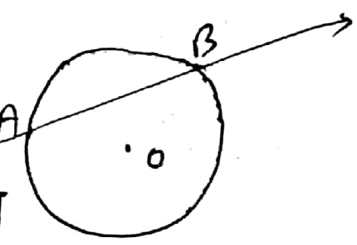
वह रेखा जो वृत्त को केवल एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है उसे वृत्त की स्पर्श रेखा कहते है।




AB स्पर्श रेखा तथा P स्पर्श बिंदु है।

प्रतिच्छेदी रेखा या छेदक रेखा →

वह रेखा जो वृत्त को दो अलग-अलग बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है उसे प्रतिच्छेदी रेखा कहते है।

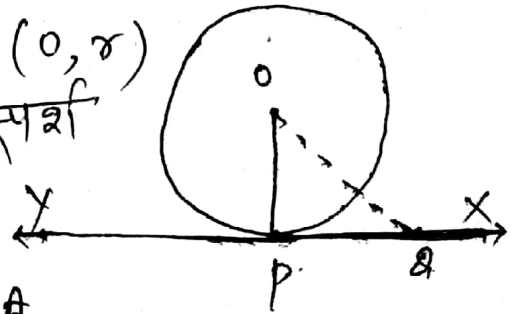



* वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिंदु को स्पर्श बिंदु कहते है।

प्रमेय – 10.1

वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।

दिया हुआ है कि वृत्त C (O, r) की स्पर्श रेखा XY तथा स्पर्श बिंदु P है।




तो सिद्ध करना है कि

$OP \perp XY$

रचना :- स्पर्श रेखा XY पर बिंदु P के अलावा एक अन्य बिंदु Q लिया और OQ को मिलाया।

Scanned by CamScanner

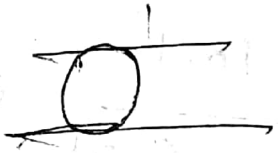
प्रमाण :- बिंदु Q वृत्त के बाहर स्थित है। यदि बिंदु Q वृत्त के अंदर होता तो XY वृत्त की एक छेदक रेखा होती और वह वृत्त की स्पर्श रेखा नहीं होती।

अत: OQ त्रिज्या OP से बड़ी है।

$OQ > OP$

OP बिंदु O से XY के अन्य बिंदुओं से न्यूनतम दूरी है।

$\therefore OP \perp XY$ proved

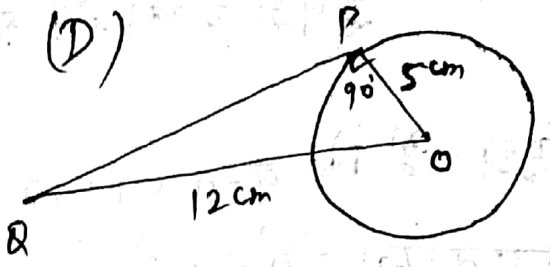




Scanned by CamScanner

# Ex-10.1

(3) ~~Ans~~ → (D)




Soln:-

$\triangle OPQ$ मे

$\angle OPQ = 90°$

$OP = 5cm$

$OQ = 12cm$

$PQ = ?$

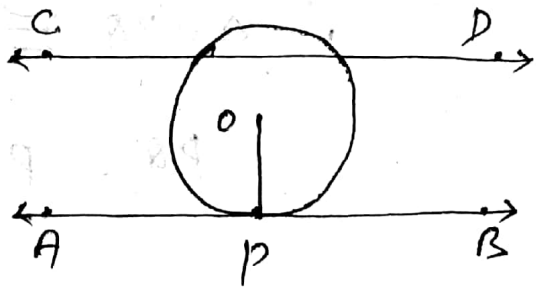
$PQ = \sqrt{OQ^2 - OP^2}$

$= \sqrt{12^2 - 5^2}$

$= \sqrt{144 - 25}$

$= \sqrt{119}$

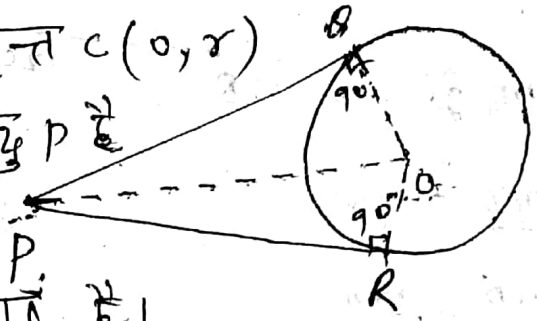
(4)




Scanned by CamScanner

प्रमेय 10.2 — बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती है।

दिया हुआ है कि वृत्त C(O, r) का बाह्य बिंदु P है जिसमें PQ तथा PR दो स्पर्श रेखाएँ है।




तो सिद्ध करना है कि

$PQ = PR$

रचना-: OP, OQ तथा OR को मिलाया।

प्रमाण-: $\triangle OPQ$ तथा $\triangle OPR$ में

$\angle OQP = \angle ORP$ (90°)

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

$OQ = OR$ (r)

$\therefore \triangle OPQ \cong \triangle OPR$ (RHS सर्वांगसमता से)

$PQ = PR$ proved

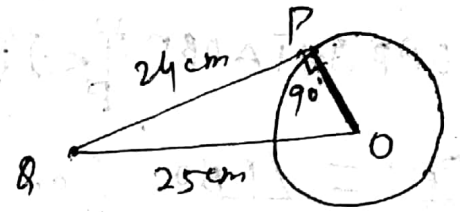


Scanned by CamScanner

# Ex-10.2

① Ans ⟶ (A)

Sol$^n$ :




$\triangle OPQ$ এ

$\angle OPQ = 90°$

$PQ = 24\text{ cm}$

$OQ = 25\text{ cm}$

$OP = ?$

$OP = \sqrt{OQ^2 - PQ^2}$

$= \sqrt{25^2 - 24^2}$

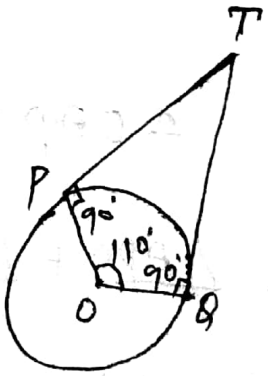
$= \sqrt{625 - 576}$

$= \sqrt{49}$

$= 7\text{ cm}$ Ans

② Ans ⟶

Sol$^n$ :




$\angle POQ + \angle P + \angle Q + \angle PTQ = 360°$

or, $110° + 90° + 90° + \angle PTQ = 360°$

or, $290° + \angle PTQ = 360°$

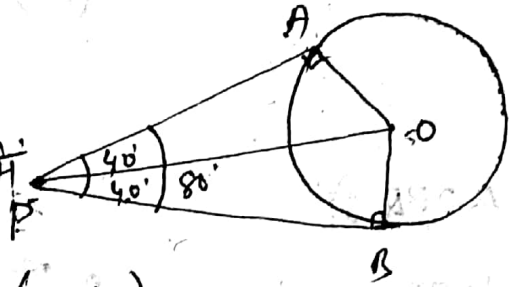
$\therefore \angle PTQ = 360° - 290°$

$= 70°$ Ans

Scanned by CamScanner

(3) Ans ⟶

Sol$^{n}$ :




$\triangle OAP$ तथा $\triangle OBP$ में,

$\angle PAO = \angle PBO$ ($90°$)

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

$OA = OB$ (r)

$\therefore \triangle OAP \cong \triangle OBP$ (RHS सर्वांगसमता से)

$\angle APO = \angle BPO$

$\angle APO = \frac{1}{2} \angle APB$

$= \frac{1}{2} \times 80° 40$

$= 40°$

$\triangle OAP$ में

$\angle APO + \angle PAO + \angle POA = 180°$

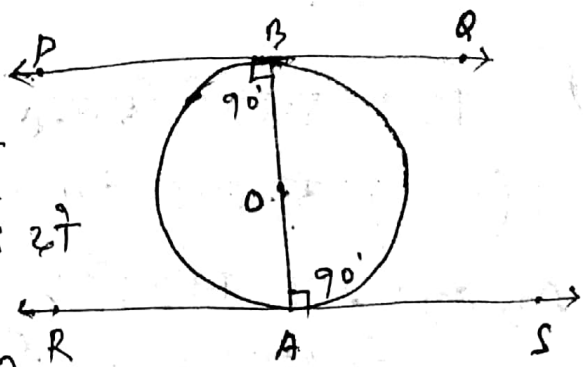
or, $40° + 90° + \angle POA = 180°$

or, $130° + \angle POA = 180°$

$\therefore \angle POA = 180° - 130° = 50°$ Ans

Scanned by CamScanner

(4) दिया हुआ है कि वृत्त $C(O, r)$ का व्यास AB है जिसमें PQ तथा RS दो स्पर्श रेखाएँ है।




तो सिद्ध करना है कि
$PQ \parallel RS$ है।

प्रमाण –: OB त्रिज्या तथा PQ स्पर्श रेखा है।

$OB \perp PQ$

$\angle OBP = 90°$ ——— ① (प्रमेय 10.1 से)

OA त्रिज्या तथा RS स्पर्श रेखा है।

$OA \perp RS$

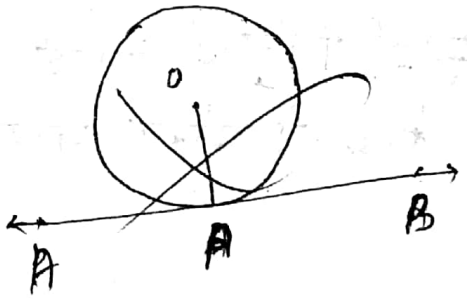
$\angle OAS = 90°$ ——— ② ( " " )

from eqn ① & ②

$\angle OBP = \angle OAS$ (एकांतर कोण)

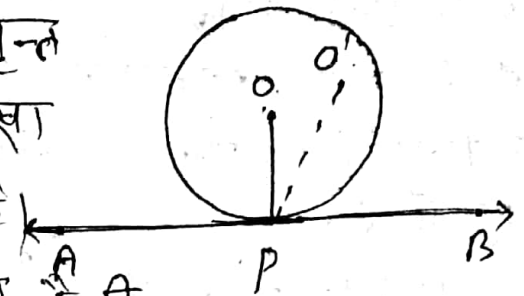
$PQ \parallel RS$ proved

(5)




Scanned by CamScanner

(5) दिया हुआ है कि वृत्त $C(O, r)$ की स्पर्श रेखा AB तथा स्पर्श बिंदु P है।




तो सिद्ध करना है कि
स्पर्श बिंदु से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लंब वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है।

रचना -: $O'P \perp AB$ खींचा।

प्रमाण -: $OP \perp AB$ (प्रमेय 10.1 से)

$\angle OPB = 90^\circ$ ——— ①

$O'P \perp AB$ (रचना से)

$\angle O'PB = 90^\circ$ ——— ②

from eqn ① & ②

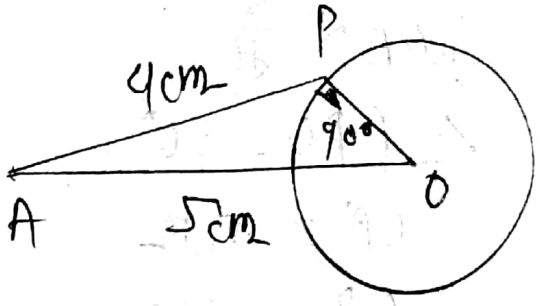
$\angle OPB = \angle O'PB$

यह संभव नहीं है।

स्पर्श बिंदु से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लंब वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है। proved

Scanned by CamScanner

(6)




$\Delta OAP$ में

$OA = 5\text{cm}$

$AP = 4\text{cm}$

$OP = r = ?$

$$OP = \sqrt{OA^2 - AP^2}$$

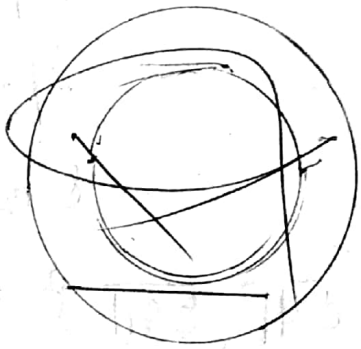
$$= \sqrt{5^2 - 4^2}$$

$$= \sqrt{25 - 16}$$

$$= \sqrt{9}$$

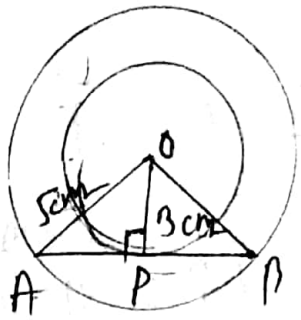
$$= 3\text{cm}$$ Ans

(7)



Scanned by CamScanner

(7)




$\Delta OAP$ में

$\angle APO = 90°$

$OA = 5cm$

$OP = 3cm$

$AP = \sqrt{OA^2 - OP^2}$

$= \sqrt{5^2 - 3^2}$

$= \sqrt{25-9}$

$= \sqrt{16}$

$= 4$

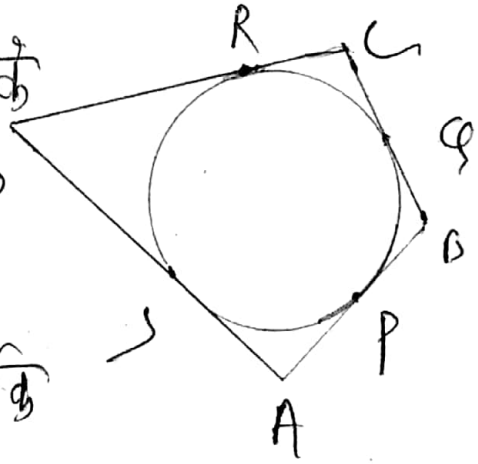
$AP = BP = 4cm$

$AB = AP + BP$

$= 4 + 4$

$= 8cm$

(8) दिया हुआ है कि वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज ABCD खींचा गया है।




तो सिद्ध करना है कि

$AB + CD = AD + BC$

प्रमाण :-

$AP = AS$ ——— (1) (प्रमेय - 10.2 से)

$BP = BQ$ ——— (2) ( " " " )

$CR = CQ$ ——— (3) ( " " " )

$DR = DS$ ——— (4) ( " " " )

Scanned by CamScanner

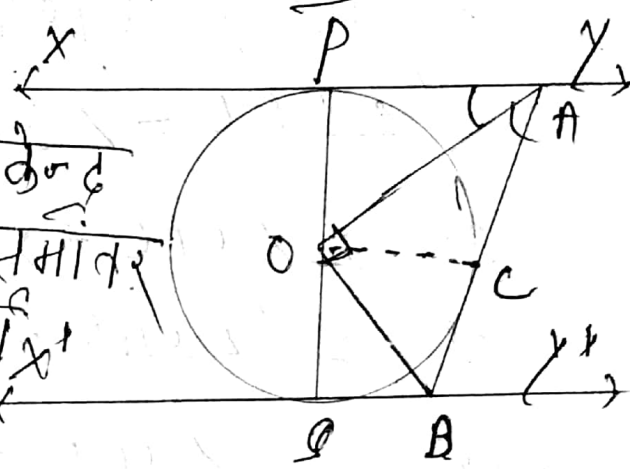
Adding from eqn (1), (2), (3) & (4)

$AP + BP + CR + DR = AS + BQ + CQ + DS$

or, $AB + CD = AS + DS + BQ + CQ$

or, $AB + CD = AD + BC$ Proved

(9) दिया हुआ है कि आकृति 10.15 में XY तथा X'Y', O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर दो समांतर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिंदु C पर स्पर्श रेखा AB, XY को A तथा X'Y' को B पर प्रतिच्छेद करती है तो सिद्ध करना है कि




$\angle AOB = 90°$

रचना :- OC को मिलाया

प्रमाण :- $\Delta OAC$ तथा $\Delta OAP$ में

$AC = AP$ (प्रमेय 10.2 से)

$OC = OP$ (r)

$OA = OA$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore \Delta OAC \cong \Delta OAP$ (SSS सर्वांगसमता से)

$\angle OAC = \frac{1}{2} \angle PAC$

$\angle PAC = \frac{1}{2} \angle OAC$

Scanned by CamScanner

इसी प्रकार

$\angle QBC = \frac{1}{2}\angle QBC$

$\angle QBC = 2\angle OBC$

$\angle OAC = \angle OAP$

$\angle OAC + \angle OAP = \angle PAC$

$\angle OAC + \angle OAC = \angle PAC$

$2\angle OAC = \angle PAC$

$\therefore \angle OAC = \frac{1}{2}\angle PAC$

$XY \parallel X'Y'$ (दिया हुआ है।)

$\angle PAC + \angle QBC = 180^\circ$ (एक ही ओर के अंत: कोणों का योग)

or, $2\angle OAC + 2\angle OBC = 180^\circ$

or, $2(\angle OAC + \angle OBC) = 90^\circ$

or, $\angle OAC + \angle OBC = 90^\circ$

$\Delta OAB$ में

$\angle OAC + \angle OBC + \angle AOB = 180^\circ$

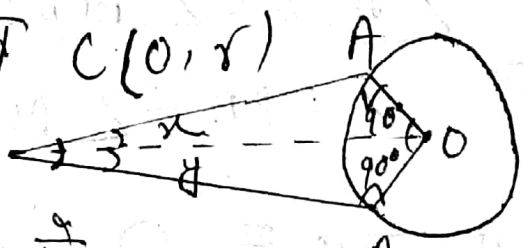
or, $90^\circ + \angle AOB = 180^\circ$

$\therefore \angle AOB = 180^\circ - 90^\circ$

$= 90^\circ$ proved

Scanned by CamScanner

(10) दिया हुआ है कि वृत्त C(O, r) का बाह्य बिंदु P है, जिसमें PA तथा PB दो स्पर्श रेखाएँ हैं।




तो सिद्ध करना है कि

$\angle AOB + \angle APB = 180^\circ$

रचना :- OP को मिलाया।

प्रमाण :- $\Delta OAP$ तथा $\Delta OBP$ में

$\angle OAP = \angle OBP$ ($90^\circ$)

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

$PA = PB$ (प्रमेय 10.2 से)

$\therefore \Delta OAP \cong \Delta OBP$ (R.H.S सर्वांगसमता से)

$\therefore \angle x = \angle y$

$\angle x = \frac{1}{2}\angle APB$

$\angle 1 = \frac{1}{2}\angle AOB$

$\angle x = \angle y$

$\angle x + \angle y = \angle APB$

$\angle x + \angle x = \angle APB$

$2\angle x = \angle APB$

$\therefore \angle x = \frac{1}{2}\angle APB$

$\Delta OAP$ में

$\angle x + \angle 1 + \angle PAO = 180^\circ$

or, $\frac{1}{2}\angle APB + \frac{1}{2}\angle AOB + 90^\circ = 180^\circ$

or, $\frac{1}{2}(\angle APB + \angle AOB) = 180^\circ - 90^\circ$

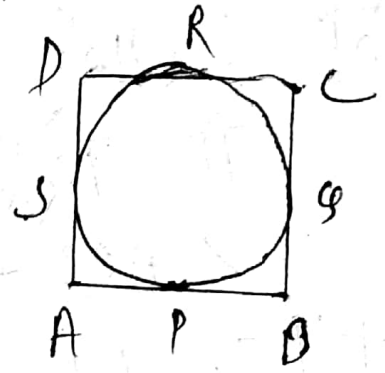
or, $\frac{1}{2}(\angle APB + \angle AOB) = 90^\circ$

Scanned by CamScanner

or. $\angle APB + \angle AOB = 90^\circ \times 2$

V.V.? or, $\angle APB + \angle AOB = 180^\circ$ proved

① दिया हुआ है कि वृत्त के परिगत ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।




तो सिद्ध करना है कि वृत्त के परिगत ABCD एक समचतुर्भुज है।

प्रमाण :-

$AP = AS$ ——— ① (प्रमेय - 10.2 से)

$BP = BQ$ ——— ② ( " " " )

$CR = CQ$ ——— ③ ( " " " )

$DR = DS$ ——— ④ ( " " " )

Adding from eqn ①, ②, ③ & ④

$AP + BP + CR + DR = AS + BQ + CQ + DS$

or, $AB + CD = AS + DS + BQ + CQ$

or, $AB + CD = AD + BC$

or, $AB + AB = BC + BC$

or, $2AB = 2BC$

$\therefore AB = BC$

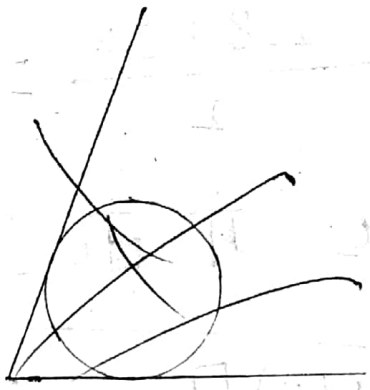
इसी प्रकार $CD = AD$

अतः $AB = BC = CD = AD$

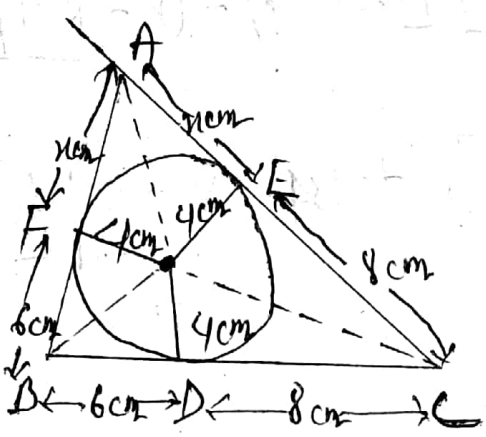
अतः ABCD एक समचतुर्भुज है। Proved

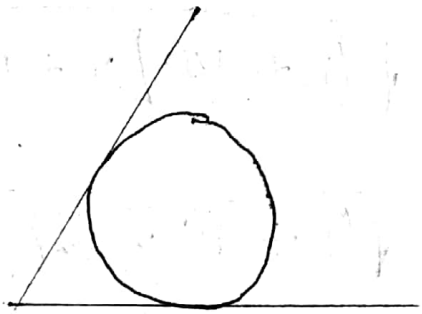
Scanned by CamScanner

(12.)



(12.)



माना कि $AE = AF = x$ cm

$\Delta ABC$ का क्षे० = $\Delta OBC$ का क्षे० + $\Delta OAC$ का क्षे० + $\Delta OAB$ का क्षे०

$= \frac{1}{2} \times BC \times OD + \frac{1}{2} \times AC \times OE + \frac{1}{2} \times AB \times OF$

$= \frac{1}{2} \times 14 \times 4 + \frac{1}{2}(8+x) \times 4 + \frac{1}{2} \times (x+6) \times 4$

$= 28 + 16 + 2x + 2x + 12$

$= 4x + 56$

$= 4(x + 14)\ cm^2$

$S = \frac{BC + AC + AB}{2}$

$= \frac{14 + 8 + x + 6 + x}{2}$

Scanned by CamScanner

$= \frac{28+2x}{2} = \frac{x(14+x)}{x} = (x+14)\text{cm}$

$\Delta ADC$ का क्षेत्र $= \sqrt{S(S-DC)(S-AC)(S-AD)}$

$= \sqrt{(x+14)[(x+14)-14][(x+14)-(x-8)][(x+14)-(x-6)]}$

$= \sqrt{(x+14)[x+14-14][x+14-x-8][x+14-x-6]}$

$= \sqrt{(x+14)\times x\times 6\times 8}$

$= \sqrt{48x(x+14)}\ \text{cm}^2$

प्रश्न से,

$4(x+14) = \sqrt{48x(x+14)}$

or, $[4(x+14)]^2 = 48x(x+14)$

or, $16(x+14)^2 = 48x(x+14)$

or, $x+14 = 3x$

or, $14 = 3x-x$

or, $2x = 14$

$\therefore x = \frac{14}{2} = 7$

Scanned by CamScanner

$AB = x + 6$

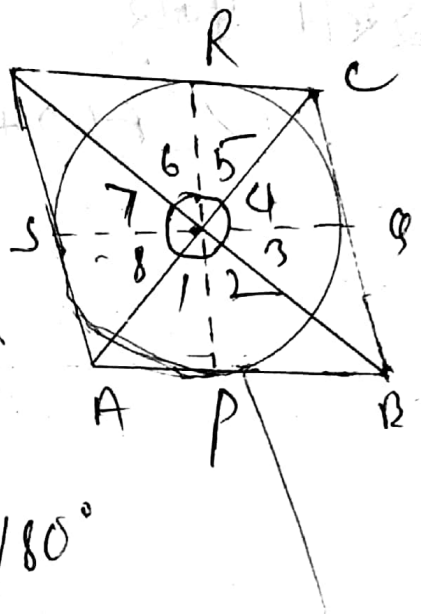
$= 7 + 6 = 13\,cm$ Ans

$AC = x + 8$

$= 7 + 8$

$= 15\,cm$

(13) दिया हुआ है कि वृत्त के परिगत ABCD एक चतुर्भुज है।




तो सिद्ध करना है कि

$\angle AOB + \angle COP = 180°$

तथा $\angle AOD + \angle BOC = 180°$

रचना :- OP, OQ, OR तथा OS को मिलाया

प्रमाण :- $\Delta OAP$ तथा $\Delta OAS$ में

$AP = AS$ (प्रमेय 10.2 से)

$OP = OS$ (r)

$OA = OA$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore \Delta OAP \cong \Delta OAS$ (SSS सर्वांगसमता से)

$\angle 1 = \angle 8$

$\angle 2 = \angle 3$

$\angle 4 = \angle 5$

$\angle 6 = \angle 7$

Scanned by CamScanner

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360°$

वा, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 6 + \angle 1 = 360°$

वा, $2\angle 1 + 2\angle 2 + 2\angle 5 + 2\angle 6 = 360°$

वा, $2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6) = 360° \; 180°$

वा, $\angle AOB + \angle COD = 180°$

दुसरी प्रकार

$\angle AOD + \angle BOC = 180°$ proved