NCERT Solutions for Class 10 Maths Chapter 2

tiwariacademy.com/ncert-solutions/class-10/maths/chapter-2/amp/

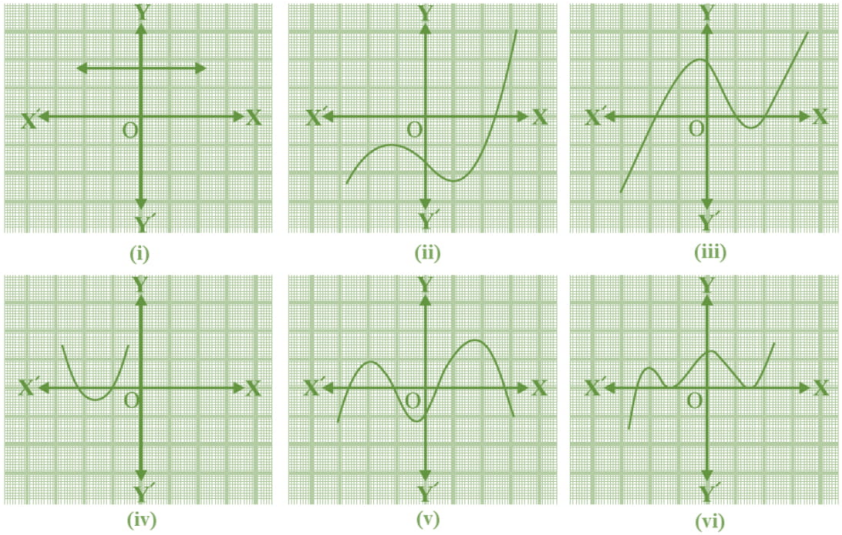
February 16, 2020

गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ – 2) (बहुपद)
(कक्षा 10)
प्रश्नावली 2.1

प्रश्न 1:

किसी बहुपद के $p(x)$ लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति 2.10 में दिया है। प्रत्येक स्थिति में, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए।



आकृति 2.10

उत्तर 1:

(i) शून्यकों की संख्या 0 है, क्योंकि ग्राफ x–अक्ष को एक भी बिंदु पर प्रतिच्छेद नहीं करता है।

(ii) शून्यकों की संख्या 1 है, क्योंकि ग्राफ x–अक्ष को एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करता है।

(iii) शून्यकों की संख्या 3 है, क्योंकि ग्राफ x–अक्ष को तीन बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है।

(iv) शून्यकों की संख्या 2 है, क्योंकि ग्राफ x–अक्ष को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है।

(v) शून्यकों की संख्या 4 है, क्योंकि ग्राफ x–अक्ष को चार बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है।

(vi) शून्यकों की संख्या 3 है, क्योंकि ग्राफ x–अक्ष को तीन बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है।

गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ – 2) (बहुपद)
(कक्षा 10)
प्रश्नावली 2.2

प्रश्न 1:

निम्न द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए:

(i). $x^2 - 2x - 8$ **(ii).** $4s^2 - 4s + 1$ **(iii).** $6x^2 - 3 - 7x$

(iv). $4u^2 + 8u$ **(v).** $t^2 - 15$ **(vi).** $3x^2 - x - 4$

उत्तर 1:

(i) $x^2 - 2x - 8$

हम पाते हैं:

$x^2 - 2x - 8$

$= x^2 - 4x + 2x - 8$

$= x(x - 4) + 2(x - 4)$

$= (x + 2)(x - 4)$

इसलिए, $x^2 - 2x - 8$ का मान शून्य है, जब $x + 2 = 0$ है या $x - 4 = 0$ है,

अर्थात जब $x = -2$ या $x = 4$ हो।

इसलिए, $x^2 - 2x - 8$ के शून्यक -2 और 4 हैं। अब

$$\text{शून्यकों का योग} = -2 + 4 = 2 = \frac{-(-2)}{1} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = (-2) \times 4 = -8 = \frac{-8}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

(ii) $4s^2 - 4s + 1$

हम पाते हैं:

$4s^2 - 4s + 1$

$= 4s^2 - 2s - 2s + 1$

$= 2s(2s - 1) - 1(2s - 1)$

$= (2s - 1)(2s - 1)$

इसलिए, $4s^2 - 4s + 1$ का मान शून्य है, जब $2s - 1 = 0$ है,

अर्थात जब $s = \frac{1}{2}$ हो।

इसलिए, $4s^2 - 4s + 1$ के शून्यक $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{2}$ हैं। अब

$$\text{शून्यकों का योग} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \frac{-(4)}{4} = \frac{-(s \text{ का गुणांक})}{s^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{\text{अचर पद}}{s^2 \text{ का गुणांक}}$$

(iii) $6x^2 - 3 - 7x$

हम पाते हैं:

$6x^2 - 3 - 7x$

$= 6x^2 - 7x - 3$

$= 6x^2 - 9x + 2x - 3$

$= 3x(2x - 3) + 1(2x - 3)$

$= (3x + 1)(2x - 3)$

इसलिए ,$6x^2 - 7x - 3$ का मान शून्य है, जब $3x + 1 = 0$ है या $2x - 3 = 0$ है,

अर्थात जब $x = -\frac{1}{3}$ या $x = \frac{3}{2}$ हो।

इसलिए, $6x^2 - 7x - 3$ के शून्यक $-\frac{1}{3}$ और $\frac{3}{2}$ हैं। अब

शून्यकों का योग $= -\frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{-2+9}{6} = \frac{7}{6} = \frac{-(-7)}{6} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} = \frac{-3}{6} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

(iv) $4u^2 + 8u$

हम पाते हैं:

$4u^2 + 8u$

$= 4u^2 + 8u$

$= 4u(u + 2)$

इसलिए, $4u^2 + 8u$ का मान शून्य है, जब $4u = 0$ है या $u + 2 = 0$ है,

अर्थात जब $u = 0$ या $u = -2$ हो।

इसलिए, $4u^2 + 8u$ के शून्यक 0 और -2 हैं। अब

शून्यकों का योग $= 0 + (-2) = -2 = \frac{-(8)}{4} = \frac{-(u \text{ का गुणांक})}{u^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= 0 \times (-2) = 0 = \frac{0}{4} = \frac{\text{अचर पद}}{u^2 \text{ का गुणांक}}$

(v) $t^2 - 15$

हम पाते हैं:

$t^2 - 15 \ = t^2 - \left(\sqrt{15}\right)^2$

$= \left(t + \sqrt{15}\right)\left(t - \sqrt{15}\right)$

इसलिए, $t^2 - 15$ का मान शून्य है, जब $t + \sqrt{15} = 0$ है या $t - \sqrt{15} = 0$ है,

अर्थात जब $x = -\sqrt{15}$ या $x = \sqrt{15}$ हो।

इसलिए, $t^2 - 15$ के शून्यक $-\sqrt{15}$ और $\sqrt{15}$ हैं। अब

शून्यकों का योग $= -\sqrt{15} + \sqrt{15} = 0 = \frac{-(0)}{1} = \frac{-(t \text{ का गुणांक})}{t^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= \left(-\sqrt{15}\right) \times \sqrt{15} = -15 = \frac{-15}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{t^2 \text{ का गुणांक}}$

(vi) $3x^2 - x - 4$

हम पाते हैं:

$= 3x^2 - x - 4$

$= 3x^2 - 4x + 3x - 4$

$= x(3x - 4) + 1(3x - 4)$

$= (3x - 4)(x + 1)$

इसलिए ,$3x^2 - x - 4$ का मान शून्य है, जब $3x - 4 = 0$ है या $x + 1 = 0$ है,

अर्थात जब $x = \frac{4}{3}$ या $x = -1$ हो।

इसलिए, $3x^2 - x - 4$ के शून्यक $\frac{4}{3}$ और -1 हैं। अब

$$\text{शून्यकों का योग} = \frac{4}{3} + (-1) = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3} = \frac{-(-1)}{3} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = \frac{4}{3} \times (-1) = -\frac{4}{3} = \frac{-4}{3} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

प्रश्न 2:

एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्याएं हैं:

(i). $\frac{1}{4}, -1$ **(ii).** $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ **(iii).** $0, \sqrt{5}$

(iv). $1, 1$ **(v).** $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ **(vi).** $4, 1$

उत्तर 2:

(i) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।

हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{4} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = -1 = \frac{-4}{4} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 4, \ b = -1 \text{ और } c = -4$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $4x^2 - x - 4$ है।

(ii) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।

हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{3} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 3, \ b = -3\sqrt{2} \text{ और } c = 1$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ है।

(iii) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।
हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = 0 = \frac{0}{1} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 1,\ b = 0 \text{ और } c = \sqrt{5}$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $x^2 + 0.x + \sqrt{5}$ है।

(iv) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।
हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = 1 = \frac{1}{1} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = 1 = \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 1,\ b = -1 \text{ और } c = 1$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $x^2 - x + 1$ है।

(v) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।
हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = \frac{-1}{4} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{4} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 4,\ b = 1 \text{ और } c = 1$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $4x^2 + x + 1$ है।

(vi) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।
हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = 4 = \frac{4}{1} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = 1 = \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 1,\ b = -4 \text{ और } c = 1$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $x^2 - 4x + 1$ है।

गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ – 2) (बहुपद)
(कक्षा 10)
प्रश्नावली 2.3

प्रश्न 1:

विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके, निम्न में $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर भागफल तथा शेषफल ज्ञात कीजिए:

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3,\ g(x) = x^2 - 2$

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5,\ g(x) = x^2 + 1 - x$

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6,\ g(x) = 2 - x^2$

उत्तर 1:

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3,\ g(x) = x^2 - 2$

इसप्रकार,

भागफल $= x - 2$

तथा शेषफल $= 7x - 9$ है ।

$$
\begin{array}{r|l}
x^2-2 & x-3 \\
\hline
x^3-3x^2+5x-3 & \\
x^3 \quad -2x & \\
- \quad + & \\
\hline
-3x^2+7x-3 & \\
-3x^2 \quad +6 & \\
+ \quad - & \\
\hline
7x-9 &
\end{array}
$$

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5,\ g(x) = x^2 + 1 - x$

इसप्रकार,

भागफल $= x^2 + x - 3$

तथा शेषफल $= 8$ है ।

$$
\begin{array}{r|l}
x^2-x+1 & x^2+x-3 \\
\hline
x^4+0.x^3-3x^2+4x+5 & \\
x^4- \quad x^3 \quad + x^2 & \\
- \quad + \quad - & \\
\hline
x^3-4x^2+4x+5 & \\
x^3 \quad - x^2 + \quad x & \\
- \quad + \quad - & \\
\hline
-3x^2+3x+5 & \\
-3x^2+3x-3 & \\
+ \quad - \quad + & \\
\hline
8 &
\end{array}
$$

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6,\ g(x) = 2 - x^2$

इसप्रकार,

भागफल $= -x^2 - 2$

तथा शेषफल $= -5x + 10$ है ।

$$
\begin{array}{r|l}
-x^2+2 & -x^2-2 \\
\hline
x^4+0.x^2-5x+6 & \\
x^4-2x^2 & \\
- \quad + & \\
\hline
2x^2-5x+6 & \\
2x^2 \quad -4 & \\
- \quad + & \\
\hline
-5x+10 &
\end{array}
$$

प्रश्न 2:

पहले बहुपद से दूसरे बहुपद को भाग करके, जाँच कीजिए कि क्या प्रथम बहुपद द्वितीय बहुपद का एक गुणनखंड है:

(i) $t^2 - 3,\ 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

(ii) $x^2 + 3x + 1,\ 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

(iii) $x^3 - 3x + 1,\ x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

उत्तर 2:

(i) $t^2 - 3,\ 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

क्योंकि शेषफल 0 है, इसलिए

बहुपद $t^2 - 3$ बहुपद $2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$ का एक गुणनखंड है।

$$
\begin{array}{r|l}
t^2+0.t-3 & 2t^2+3t+4 \\
\hline
 & 2t^4+3t^3-2t^2-9t-12 \\
 & 2t^4+0.t^3-6t^2 \\
 & - \quad - \quad + \\
\hline
 & 3t^3+4t^2-9t-12 \\
 & 3t^3+0.t^2-9t \\
 & - \quad - \quad + \\
\hline
 & 4t^2+0.t-12 \\
 & 4t^2+0.t-12 \\
 & - \quad - \quad + \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

(ii) $x^2 + 3x + 1,\ 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

क्योंकि शेषफल 0 है, इसलिए

बहुपद $x^2 + 3x + 1$ बहुपद $3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$ का एक गुणनखंड है।

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+3x+1 & 3x^2-4x+2 \\
\hline
 & 3x^4+5x^3-7x^2+2x+2 \\
 & 3x^4+9x^3+3x^2 \\
 & - \quad - \quad - \\
\hline
 & -4x^3-10x^2+2x+2 \\
 & -4x^3-12x^2-4x \\
 & + \quad + \quad + \\
\hline
 & 2x^2+6x+2 \\
 & 2x^2+6x+2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

(iii) $x^3 - 3x + 1,\ x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

क्योंकि शेषफल 0 नहीं है, इसलिए

बहुपद $x^3 - 3x + 1$ बहुपद $x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$ का गुणनखंड नहीं है।

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-3x+1 & x^2-1 \\
\hline
 & x^5-4x^3+x^2+3x+1 \\
 & x^5-3x^3+x^2 \\
 & - \quad + \quad - \\
\hline
 & -x^3 \quad +3x+1 \\
 & -x^3 \quad +3x-1 \\
 & + \quad - \quad + \\
\hline
 & 2
\end{array}
$$

प्रश्न 3:

$3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के अन्य सभी शून्यक ज्ञात कीजिए, यदि इसके दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ हैं।

उत्तर 3:

माना $p(x) = 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$

इस प्रकार, $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$, $p(x)$ के शून्यक हैं ।

इसलिए, $\left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ और $\left(x + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, $p(x)$ के गुणनखंड हैं ।

या $x^2 - \frac{5}{3}$, $p(x)$ का गुणनखंड है।

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 + 0.x - \frac{5}{3} & 3x^2 + 6x + 3 \\
\hline
 & 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5 \\
 & 3x^4 + 0x^3 - 5x^2 \\
 & - \quad - \quad + \\
\hline
 & 6x^3 + 3x^2 - 10x - 5 \\
 & 6x^3 + 0x^2 - 10x \\
 & - \quad - \quad + \\
\hline
 & 3x^2 + 0x - 5 \\
 & 3x^2 + 0x - 5 \\
 & - \quad - \quad + \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5 &= \left(x^2 - \frac{5}{3}\right)\left(3x^2 + 6x + 3\right) \\
&= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}\right)\left(x^2 + 2x + 1\right)
\end{aligned}
$$

इस प्रकार,

$p(x) = 3\left(x^2 - \frac{5}{3}\right)(x^2 + 2x + 1)$

$= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}\right)[x^2 + x + x + 1]$

$= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}\right)[x(x+1) + 1(x+1)]$

$= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}\right)(x+1)(x+1)$

इसलिए, $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$, $-\sqrt{\frac{5}{3}}$, -1 और -1 हैं।

प्रश्न 4:

यदि $x^3 - 3x^2 + x + 2$ को एक बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर, भागफल और शेषफल क्रमशः $x - 2$ और $-2x + 4$ हैं तो $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

दिया है

भाजक $= g(x)$

भागफल $= x - 2$

भाज्य $= x^3 - 3x^2 + x + 2$

शेषफल $= -2x + 4$

हम जानते हैं कि

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

इसलिए,

$$x^3 - 3x^2 + x + 2 = g(x) \times (x - 2) - (-2x + 4)$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + x + 2 - (-2x + 4) = g(x) \times (x - 2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 - 3x^2 + x + 2 - (-2x + 4)}{(x - 2)} = g(x)$$

इस प्रकार, $g(x) = x^2 - x + 1$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x + 1 \\ \hline x - 2 & x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \\ & x^3 - 2x^2 \\ & - \quad + \\ \hline & -x^2 + 3x - 2 \\ & -x^2 + 2x \\ & + \quad - \\ \hline & x - 2 \\ & x - 2 \\ & - \quad + \\ \hline & 0 \end{array}$$

प्रश्न 5:

बहुपदों $p(x)$, $g(x)$, $q(x)$ और $r(x)$ के ऐसे उदाहरण दीजिए जो विभाजन अल्गोरिथम को संतुष्ट करते हों तथा

(i) घात $p(x)$ = घात $q(x)$ **(ii)** घात $q(x)$ = घात $r(x)$ **(iii)** घात $r(x) = 0$

उत्तर 5:

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से $p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$, जहाँ $q(x) \neq 0$,

घात $r(x) = 0$ या घात $r(x)$ < घात $g(x)$

(i) घात $p(x)$ = घात $q(x)$

भाज्य और भागफल की घात तभी बराबर हो सकती है जब भाजक एक अचर (घात 0 हो) संख्या हो।

इसलिए,

माना $p(x) = 3x^2 - 6x + 5$

माना $g(x) = 3$

इस प्रकार $q(x) = x^2 - 2x + 1$ और $r(x) = 2$

(ii) घात $q(x)$ = घात $r(x)$

माना $p(x) = 2x^2 - 4x + 3$

माना $g(x) = x^2 - 2x + 1$

इस प्रकार $q(x) = 2$ और $r(x) = 1$

(iii) घात $r(x) = 0$

माना $p(x) = 2x^2 - 4x + 3$

माना $g(x) = x^2 - 2x + 1$

इस प्रकार $q(x) = 2$ और $r(x) = 1$

प्रश्न 1:

सत्यापित कीजिए कि निम्न त्रिघात बहुपदों के साथ दी गई संख्याएँ उसकी शून्यक हैं। प्रत्येक स्थिति में शून्यांकों और गुणांकों के बीच संबंध को भी सत्यापित कीजिए:

(i). $2x^3 + x^2 - 5x + 2;\ \frac{1}{2}, 1, -2$ **(ii).** $x^3 - 4x^2 + 5x - 2;\quad 2, 1, 1$

उत्तर 1:

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2;\ \frac{1}{2}, 1, -2$

माना $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

इसलिए, $p\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}\right) + 2$

$= 2 \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 5 \times \frac{1}{2} + 2$

$= \frac{2}{4} - \frac{5}{2} + 2$

$= \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$

इसलिए, $\frac{1}{2}$, $p(x)$ का शून्यक है।

अब, $p(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 5(1) + 2$

$= 2 \times 1 + 1 - 5 \times 1 + 2$

$= 3 - 5 + 2$

$= 5 - 5 = 0$

इसलिए, 1, $p(x)$ का शून्यक है।

अब, $p(-2) = 2(-2)^3 + (-2)^2 - 5(-2) + 2$

$= 2 \times (-8) + 4 + 10 + 2$

$= -16 + 4 + 10 + 2$

$= -16 + 16 = 0$

इसलिए, -2, $p(x)$ का शून्यक है।

इसप्रकार, $\frac{1}{2}, 1$ और -2, $p(x)$ के शून्यक हैं।

अब, माना $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ तथा $\gamma = -2$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2} + 1 + (-2) = \frac{3-4}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{-(1)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times (-2) + (-2) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2 - 1 = \frac{-5}{2} = \frac{-5}{2} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2} \times 1 \times (-2) = -1 = \frac{-2}{2} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसप्रकार, शून्यांकों और गुणांकों के बीच संबंध सत्यापित हुआ।

(ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2;\quad 2, 1, 1$

माना $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

इसलिए, $p(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 5(2) - 2 = 8 - 16 + 10 - 2 = 18 - 18 = 0$

इसलिए, 2, $p(x)$ का शून्यक है।

अब, $p(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 5(1) - 2$
$= 1 - 4 + 5 - 2$
$= 6 - 6 = 0$
इसलिए, 1, $p(x)$ का शून्यक है।
इसप्रकार, 2, 1 और 1, $p(x)$ के शून्यक हैं।
अब, माना $\alpha = 2, \beta = 1$ तथा $\gamma = 1$

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 + 1 + 1 = 4 = \frac{-(-1)}{1} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 2 = 2 + 1 + 2 = 5 = \frac{5}{1} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta\gamma = 2 \times 1 \times 1 = 2 = \frac{-(-2)}{1} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसप्रकार, शून्यांकों और गुणांकों के बीच संबंध सत्यापित हुआ।

प्रश्न 2:
एक त्रिघात बहुपद प्राप्त कीजिए जिसके शून्याकों का योग, दो शून्याकों को एक साथ लेकर उनके गुणनफलों का योग तथा तीनों शून्याकों के गुणनफल क्रमशः $2, -7, -14$ हों।

उत्तर 2:
माना $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ एक त्रिघात बहुपद है और α, β तथा γ बहुपद के शून्याक हैं
दिया है,
$\alpha + \beta + \gamma = 2$
$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -7$
$\alpha\beta\gamma = -14$
हम जानते हैं कि,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}, \quad \alpha\beta\gamma = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसलिए,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{-b}{a} = \frac{2}{1}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{c}{a} = \frac{-7}{1}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{-d}{a} = \frac{-14}{1}$$

तुलना करने पर, $a = 1, b = -2, c = -7$ और $d = 14$
अतः, त्रिघात बहुपद $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ अर्थात $p(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 14$ होगा।

प्रश्न 3:

यदि बहुपद $x^3 - 3x^2 + x + 1$ के शून्यक $a - b,\ a,\ a + b$ हों, तो a और b ज्ञात कीजिए।

उत्तर 3:

हम जानते हैं कि,

$$\text{मूलों का योगफल} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसलिए,

$$(a - b) + a + (a + b) = \frac{-(-3)}{1}$$

$\Rightarrow 3a = 3$

$\Rightarrow a = 1$

$$\text{मूलों का गुणनफल} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसलिए,

$$(a - b)(a)(a + b) = \frac{-(1)}{1}$$

$\Rightarrow (1 - b)1(1 + b) = -1$ [क्योंकि $a = 1$]

$\Rightarrow 1 - b^2 = -1$

$\Rightarrow b^2 = 2 \quad \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$

इस प्रकार, $a = 1$ और $b = \pm\sqrt{2}$

प्रश्न 4:

यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 13x - 35$ के दो शून्यक $2 \pm \sqrt{3}$ हों, तो अन्य शून्यक ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

माना $p(x) = x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 13x - 35$

दिया है, $2 + \sqrt{3}$ और $2 - \sqrt{3}$ बहुपद $p(x)$ के दो शून्यक हैं

इसलिए, $(x - 2 - \sqrt{3})$ और $(x - 2 + \sqrt{3})$ बहुपद $p(x)$ के दो गुणनखंड हैं।

इसलिए, $(x - 2)^2 - (\sqrt{3})^2$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड है।

अर्थात $x^2 - 4x + 1$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड है।

[क्योंकि$(x - 2)^2 - (\sqrt{3})^2 = x^2 - 4x + 1$]

इसप्रकार,

$p(x) = x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 13x - 35$

$= (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 35)$

$= (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 7x + 5x - 35)$

$= (x^2 - 4x + 1)[x(x - 7) + 5(x - 7)]$

$= (x^2 - 4x + 1)(x + 5)(x - 7)$

अन्य शून्यक प्राप्त करने के लिए $x + 5 = 0$ और $x - 7 = 0$ रखने पर, $x = -5$ और $x = 7$

इसप्रकार, अन्य शून्यक $x = -5$ और $x = 7$ हैं।

प्रश्न 5:

यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ को एक अन्य बहुपद $x^2 - 2x + k$ से भाग दिया जाए और शेषफल $x + a$ आता हो, तो k तथा a ज्ञात कीजिए।

उत्तर 5:

दिया है

भाजक $= x^2 - 2x + k$

भाज्य $= x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$

शेषफल $= x + a$

हम जानते हैं कि

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

इसलिए,

$x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10 = (x^2 - 2x + k) \times$ भागफल $+ (x + a)$

$x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10 - (x + a) = (x^2 - 2x + k) \times$ भागफल

$\Rightarrow \dfrac{x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 26x + 10 - a}{x^2 - 2x + k} =$ भागफल

इसप्रकार, यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 26x + 10 - a$ को बहुपद $x^2 - 2x + k$ से भाग दिया जाए तो शेषफल 0 होगा।

तुलना करने पर,

$-10 + 2k = 0$

$\Rightarrow 2k = 10$

$\Rightarrow k = 5$

और

$10 - a - 8k + k^2 = 0$

$\Rightarrow 10 - a - 8 \times 5 + 5^2 = 0$ [क्योंकि $k = 5$]

$\Rightarrow 10 - a - 40 + 25 = 0$

$\Rightarrow -a - 5 = 0$

$\Rightarrow a = -5$

इस प्रकार, $k = 5$ और $a = -5$

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2-4x+(8-k) \\
\hline
x^2-2x+k \;\big)\; x^4-6x^3+16x^2-26x+10-a \\
\quad x^4-2x^3+\;kx^2 \\
\quad - \;\; + \;\; - \\
\hline
\qquad -4x^3+(16-k)x^2-26x \\
\qquad -4x^3+\quad 8x^2-\;4kx \\
\qquad + \;\; - \qquad + \\
\hline
\qquad\qquad (8-k)x^2-(26-4k)x+10-a \\
\qquad\qquad (8-k)x^2-(16-2k)x+(8k-k^2) \\
\qquad\qquad - \qquad + \qquad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad (-10+2k)x+(10-a-8k+k^2)
\end{array}
$$