NCERT Solutions for Class 10 Maths Chapter 8 Exercise 8.4

tiwariacademy.com/ncert-solutions/class-10/maths/chapter-8/exercise-8-4/amp/

प्रश्न 1:

त्रिकोणमितीय अनुपातों $\sin A$, $\cos A$ और $\tan A$ को के $\cot A$ पदों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर 1:

(i). $\sin A$

$= \sqrt{\sin^2 A}$

$= \sqrt{\frac{1}{\text{cosec}^2 A}}$ $\left[\text{क्योंकि } \sin A = \frac{1}{cosec\ A}\right]$

$= \sqrt{\frac{1}{1+\cot^2 A}}$ $\left[\text{क्योंकि } \text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$

(ii). $\cos A$

$= \sqrt{\cos^2 A}$

$= \sqrt{1 - \sin^2 A}$ $\left[\text{क्योंकि } \cos^2 A = 1 - \sin^2 A\right]$

$= \sqrt{1 - \frac{1}{\text{cosec}^2 A}}$ $\left[\text{क्योंकि } \sin A = \frac{1}{cosec\ A}\right]$

$= \sqrt{1 - \frac{1}{1+\cot^2 A}}$ $\left[\text{क्योंकि } \text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A\right]$

$= \sqrt{\frac{1+\cot^2 A-1}{1+\cot^2 A}}$

$= \frac{\cot A}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}$

(iii). $\tan A = \frac{1}{\cot A}$ $\left[\text{क्योंकि } \tan A = \frac{1}{cot\ A}\right]$

प्रश्न 2:

$\angle A$ के अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को $\sec A$ के पदों में लिखिए।

उत्तर 2:

(i). $\sin A$

$= \sqrt{\sin^2 A}$

$= \sqrt{1 - \cos^2 A}$ $\left[\text{क्योंकि } \sin^2 A = 1 - \cos^2 A\right]$

$= \sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2 A}}$ $\left[\text{क्योंकि } \cos A = \frac{1}{sec\ A}\right]$

$= \sqrt{\frac{\sec^2 A-1}{\sec^2 A}}$

$= \frac{\sqrt{\sec^2 A-1}}{\sec A}$

(ii). $\cos A$

$\cos A = \frac{1}{sec\ A}$ $\left[\text{क्योंकि } \cos A = \frac{1}{sec\ A}\right]$

(iii). $\tan A = \sqrt{\tan^2 A}$

$= \sqrt{\sec^2 A - 1}$ $\left[\text{क्योंकि } \sec^2 A = 1 + \tan^2 A\right]$

(iv). $\operatorname{cosec} A = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 A}$

$= \sqrt{1 + \cot^2 A}$ $\left[\text{क्योंकि } \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A\right]$

$= \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 A}}$ $\left[\text{क्योंकि } \cot A = \frac{1}{\tan A}\right]$

$= \sqrt{1 + \frac{1}{\sec^2 A - 1}}$ $\left[\text{क्योंकि } \sec^2 A = 1 + \tan^2 A\right]$

$= \sqrt{\frac{\sec^2 A - 1 + 1}{\sec^2 A - 1}}$

$= \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

(v). $\cot A = \sqrt{\cot^2 A}$

$= \sqrt{\frac{1}{\tan^2 A}}$ $\left[\text{क्योंकि } \cot A = \frac{1}{\tan A}\right]$

$= \sqrt{\frac{1}{\sec^2 A - 1}}$ $\left[\text{क्योंकि } \sec^2 A = 1 + \tan^2 A\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

प्रश्न 3:

मान निकालिए:

(i). $\frac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°}$ **(ii).** $\sin 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$

उत्तर 3:

(i). $\frac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°}$

$= \frac{\sin^2 63° + \cos^2(90° - 27°)}{\cos^2 17° + \sin^2(90° - 73°)}$ $\left[\text{क्योंकि } \cos(90° - \theta) = \sin\theta \text{ और } \sin(90° - \theta) = \cos\theta\right]$

$= \frac{\sin^2 63° + \cos^2 63°}{\cos^2 17° + \sin^2 17°}$

$= \frac{1}{1} = 1$ $\left[\text{क्योंकि } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\right]$

(ii). $\sin 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$

$= \cos(90° - 25°) \cos 65° + \sin(90° - 25°) \sin 65°$

$= \cos 65° \cos 65° + \sin 65° \sin 65°$

$= \cos^2 65° + \sin^2 65° = 1$ $\left[\text{क्योंकि } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\right]$

प्रश्न 4:

सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प की पुष्टि कीजिए:

(i). $9\sec^2 A - 9\tan^2 B$ बराबर है:

(A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

(ii). $(1+\tan\theta+\sec\theta)(1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta)$ बराबर है:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1

(iii). $(\sec A+\tan A)(1-\sin A)$ बराबर है:

(A) $\sec A$ (B) $\sin A$ (C) $cosec\ A$ (D) $\cos A$

(iv). $\frac{1+tan^2A}{1+cot^2A}$ बराबर है:

(A) $\sec^2 A$ (B) -1 (C) cot^2A (D) tan^2A

उत्तर 4:

(i). $9sec^2\ A-9tan^2\mathrm{B}$

दिया है $9sec^2\ A-9tan^2\mathrm{B}$

$=9(sec^2\ A-tan^2\mathrm{B})$

$=9(1)$ $\left[\text{क्योंकि } sec^2\ A-tan^2\mathrm{B}=1\right]$

$=9$

इसलिए, विकल्प (B) सही है।

(ii). $(1+\tan\theta+\sec\theta)(1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta)$

दिया है $(1+\tan\theta+\sec\theta)(1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta)$

$=1+\cot\theta-cosec\ \theta+\tan\theta+\tan\theta\cot\theta-\tan\theta\ cosec\ \theta+\sec\theta+\sec\theta\cot\theta-\sec\theta\ cosec\ \theta$

$=1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{1}{sin\ \theta}+\frac{sin\ \theta}{cos\ \theta}+1-\frac{sin\ \theta}{cos\ \theta}\times\frac{1}{sin\ \theta}+\frac{1}{cos\ \theta}+\frac{1}{cos\ \theta}\times\frac{cos\ \theta}{sin\ \theta}-\frac{1}{cos\ \theta}\times\frac{1}{sin\ \theta}$

$\left[\text{क्योंकि } \tan\theta\cot\theta=1\right]$

$=1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{1}{sin\ \theta}+\frac{sin\ \theta}{cos\ \theta}+1-\frac{1}{cos\ \theta}+\frac{1}{cos\ \theta}+\frac{1}{sin\ \theta}-\frac{1}{\sin\theta\ cos\ \theta}$

$=1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{sin\ \theta}{cos\ \theta}+1-\frac{1}{\sin\theta\ cos\ \theta}$

$=2+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{sin\ \theta}{cos\ \theta}-\frac{1}{\sin\theta cos\ \theta}$

$=2+\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta-1}{\sin\theta cos\ \theta}$

$=2+\frac{1-1}{\sin\theta cos\ \theta}$ $\left[\text{क्योंकि } \cos^2\theta+\sin^2\theta=1\right]$

$=2+0=2$

इसलिए, विकल्प (C) सही है।

(iii). $(\sec A+\tan A)(1-\sin A)$

दिया है $(\sec A+\tan A)(1-\sin A)$

$=\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)(1-\sin A)$

$=\left(\frac{1+\sin A}{\cos A}\right)(1-\sin A)$

$=\frac{1-\sin^2 A}{\cos A}$

$=\frac{\cos^2 A}{\cos A}=\cos A$

इसलिए, विकल्प (D) सही है।

(iv). $\frac{1+tan^2 A}{1+cot^2 A}$

दिया है $\frac{1+tan^2 A}{1+cot^2 A}$

$= \frac{\sec^2 A}{\text{cosec}^2 A}$ $\quad$ [क्योंकि $\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$]

$= \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 A}\right)}{\left(\frac{1}{\sin^2 A}\right)}$

$= \frac{1}{cos^2 A} \times \frac{sin^2 A}{1} = tan^2 A$

इसलिए, विकल्प (D) सही है।

प्रश्न 5:

निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यून कोण है:

(i). $(coscec\ \theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ **(ii).** $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

(iii). $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\,\text{cosec}\,\theta$ **(iv).** $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

(v). सर्वसमिका $\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ को लागू करके

$\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \text{cosec}\,A + \cot A$

(vi). $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ **(vii).** $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii). $(\sin A + cosec\ A)^2 + (\cos A + sec\ A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix). $(cosec\ A - \sin A)(sec\ A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$ **(x).** $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

उत्तर 5:

(i). $(coscec\ \theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

वाम पक्ष $= (coscec\ \theta - \cot\theta)^2$

$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$

$= \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$

$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$

$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}$ $\quad$ [क्योंकि $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$]

$= \frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ = दाँया पक्ष

(ii). $\frac{\cos A}{1+\sin A}+\frac{1+\sin A}{\cos A}=2\sec A$

वाम पक्ष $=\frac{\cos A}{1+\sin A}+\frac{1+\sin A}{\cos A}$

$=\frac{\cos^2 A+(1+\sin A)^2}{(1+\sin A)\cos A}$

$=\frac{\cos^2 A+1+\sin^2 A+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$

$=\frac{1+1+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$ $\quad\left[\text{क्योंकि } \sin^2 A+\cos^2 A=1\right]$

$=\frac{2+2sin\,A}{(1+sin\,A)\,cos\,A}$

$=\frac{2(1+sin\,A)}{(1+sin\,A)\,cos\,A}$

$=\frac{2}{cos\,A}=2\sec A=$ दाँया पक्ष

(iii). $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\sec\theta\,\text{cosec}\,\theta$

वाम पक्ष $=\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$

$=\left[\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}\right]+\left[\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right]$ $\quad\left[\text{क्योंकि } \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$

$=\left[\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}}\right]+\left[\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}\right]$

$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta\,(\sin\theta-\cos\theta)}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)}$

$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}-\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$ $\quad\left[\text{क्योंकि } (\cos\theta-\sin\theta)=-(\sin\theta-\cos\theta)\right]$

$=\frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\cos\theta\sin\theta\,(\sin\theta-\cos\theta)}$

$=\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta)}{\cos\theta\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$ $\quad\left[\text{क्योंकि } a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)\right]$

$=\frac{(1+\cos\theta\sin\theta)}{\cos\theta\sin\theta}$ $\quad\left[\text{क्योंकि } \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\right]$

$=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}+\frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\sec\theta\,\text{cosec}\,\theta+1$

= दाँया पक्ष

(iv). $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

वाम पक्ष $= \frac{1+\sec A}{\sec A}$

$= \frac{1+\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$ [क्योंकि $\sec A = \frac{1}{\cos A}$]

$= \frac{\frac{\cos A + 1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$

$= \frac{1+\cos A}{1}$

$= \frac{1+\cos A}{1} \times \frac{1-\cos A}{1-\cos A}$

$= \frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A}$

$= \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$ [क्योंकि $1-\cos^2 A = \sin^2 A$]

= दाँया पक्ष

(v). $\frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$

वाम पक्ष $= \frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1}$

$= \frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1}$

$= \frac{\cot A-1+\operatorname{cosec} A}{\cot A+1-\operatorname{cosec} A}$ [अंश और हर को $\sin A$ से भाग करने पर]

$= \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - (1)}{\cot A + 1 - \operatorname{cosec} A}$

$= \frac{\cot A+\operatorname{cosec} A-(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)}{\cot A+1-\operatorname{cosec} A}$ [क्योंकि $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$]

$= \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - (\operatorname{cosec} A + \cot A)(\operatorname{cosec} A - \cot A)}{\cot A + 1 - \operatorname{cosec} A}$

$= \frac{(\cot A + \operatorname{cosec} A)(1 - \operatorname{cosec} A + \cot A)}{1 - \operatorname{cosec} A + \cot A}$

$= \cot A + \operatorname{cosec} A$

= दाँया पक्ष

(vi). $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

वाम पक्ष $= \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A} \times \frac{1+\sin A}{1+\sin A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}} \qquad \left[\text{क्योंकि } 1-\sin^2 A = \cos^2 A\right]$$

$$= \frac{1+\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$$

$= \sec A + \tan A$

= दाँया पक्ष

(vii). $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

वाम पक्ष $= \frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta}$

$$= \frac{\sin\theta\,(1-2\sin^2\theta)}{\cos\theta\,(2\cos^2\theta - 1)}$$

$$= \frac{\sin\theta(1-2\sin^2\theta)}{\cos\theta[2(1-\sin^2\theta)-1]} \qquad \left[\text{क्योंकि } \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta\right]$$

$$= \frac{\sin\theta\,(1-2\sin^2\theta)}{\cos\theta\,(2-2\cos^2\theta - 1)}$$

$$= \frac{\sin\theta\,(1-2\sin^2\theta)}{\cos\theta\,(1-2\sin^2\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

= दाँया पक्ष

(viii). $(\sin A + cosec\ A)^2 + (\cos A + sec\ A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

वाम पक्ष $= (\sin A + cosec\ A)^2 + (\cos A + sec\ A)^2$

$= \sin^2 A + \text{cosec}^2 A + 2\sin A\ cosec\ A + \cos^2 A + \sec^2 A + 2\cos A\ sec\ A$

$= (\sin^2 A + \cos^2 A) + \text{cosec}^2 A + 2 + \sec^2 A + 2$

$\left[\text{क्योंकि } \cos A\ sec\ A = 1, \quad \sin A\ cosec\ A = 1\right]$

$= 1 + (1 + \cot^2 A) + 2 + (1 + \tan^2 A) + 2$

$\left[\text{क्योंकि } \text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A, \quad \sec^2 A = 1 + \tan^2 A\right]$

$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

= दाँया पक्ष

(ix). $(cosec\ A - \sin A)(sec\ A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$

वाम पक्ष $= (cosec\ A - \sin A)(sec\ A - \cos A)$

$= \left(\frac{1}{\sin A} - \sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A} - \cos A\right)$

$= \left(\frac{1 - \sin^2 A}{\sin A}\right)\left(\frac{1 - \cos^2 A}{\cos A}\right)$

$= \left(\frac{\cos^2 A}{\sin A}\right)\left(\frac{\sin^2 A}{\cos A}\right)$

$= \sin A\ cos\ A$ ... (i)

= दाँया पक्ष $= \frac{1}{\tan A + \cot A}$

$= \frac{1}{\left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos A \sin A}\right)}$

$= \cos A \sin A$ ... (ii)

समीकरण (i) और (ii) से

वाम पक्ष = दाँया पक्ष

(x). $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

वाम पक्ष $= \frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$

$= \frac{\sec^2 A}{\text{cosec}^2 A}$ $\left[\text{क्योंकि } \text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A,\ \sec^2 A = 1 + \tan^2 A\right]$

$= \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 A}\right)}{\left(\frac{1}{\sin^2 A}\right)}$

$= \frac{1}{\cos^2 A} \times \frac{\sin^2 A}{1} = \tan^2 A$

= दाँया पक्ष

अब, $\left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2$

$= \left(\frac{1 - \frac{\sin A}{\cos A}}{1 - \frac{\cos A}{\sin A}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}}\right)^2$

$= \left(\frac{\cos A - \sin A}{\cos A} \times \frac{\sin A}{\sin A - \cos A}\right)^2$

$= \left(-\frac{\sin A - \cos A}{\cos A} \times \frac{\sin A}{\sin A - \cos A}\right)^2$

$= \left(-\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2 = \tan^2 A =$ दाँया पक्ष