लघु उत्तरीय प्रश्नोत्तर
2 × 15 = 30 अंक

वास्तविक संख्याएँ

प्रश्न 1. परिमेय संख्या को परिभाषित करें। (2015C)

हल : वैसी संख्या $\frac{P}{Q}$ के रूप में हो, लेकिन $Q \neq 0$ हो परिमेय संख्या कहलाती है।

प्रश्न 2. क्या सभी वास्तविक संख्याएँ एक परिमेय संख्या हैं ? (2013A)

हल : नहीं।

प्रश्न 3. बतायें की एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का योग परिमेय संख्या होती है या अपरिमेय संख्या। (M. Q., Set–I : 2011)

हल : अपरिमेय।

प्रश्न 4. 127/200 का दशमलव प्रसार ज्ञात करें। (M. Q., Set–II : 2011)

हल : $\frac{127}{200} = \frac{63.5}{100} = 0.635$ उत्तर।

प्रश्न 5. 625 के अभाज्य गुणनखण्ड में 5 का घात कितना होगा ? (M. Q., Set–III : 2011)

हल : $625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ अर्थात् 5 का घात = 4 उत्तर।

प्रश्न 6. 1.34 को परिमेय संख्या के रूप में लिखें। (2013A, 2015C)

हल : $1.34 = \frac{134}{100} = \frac{67}{50}$ उत्तर।

प्रश्न 7. $0.\bar{6}$ को परिमेय संख्या के सरल रूप में व्यक्त करें। (2015A)

हल : मान लिया कि $x = 0.\bar{6}$

$\therefore \quad x = 0.666...$

दोनों तरफ 10 से गुणा करने पर,

$10x = 6.66 ... \quad \Rightarrow \quad 10x = 6 + .66 ...$

$\Rightarrow \quad 10x = 6 + x \quad \Rightarrow \quad 10x - x = 6$

$\Rightarrow \quad 9x = 6 \quad \therefore \quad x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. उत्तर।

प्रश्न 8. 4/75 परिमेय संख्या के दशमलव प्रसार सांत या असांत आवर्ती है ज्ञात करें। (M. Q., Set–II : 2011)

हल : 75) 400 (0.053

375

250

225

25

उत्तर– असांत आवर्ती, $\frac{4}{75} = 0.053\dot{3}$.

प्रश्न 9. बताइए कि $\frac{13}{3125}$ परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार सांत है या असांत आवर्ती है।

हल : $\frac{13}{3125}$ में, हर 3125 है।

$3125 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

स्पष्ट है, 3125 में केवल 5 अभाज्य गुणनखंड हैं।

इसलिए, $\frac{13}{3125}$ का दशमलव प्रसार सांत है; उत्तर।

5	3125
5	625
5	125
5	25
5	5
	1

प्रश्न 10. बताइए कि $\frac{17}{8}$ परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार सांत है असांत आवर्ती है। (2013

हल : $\frac{17}{8}$ में हर 8 है।

$8 = 2 \times 2 \times 2$

स्पष्ट है, 8 में केवल 2 अभाज्य गुणनखंड हैं।

इसलिए, $\frac{17}{8}$ का दशमलव प्रसार सांत है; उत्तर।

प्रश्न 11. बताइए कि $\frac{29}{343}$ परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार सांत या असांत आवर्ती है।

हल : $\frac{29}{343}$ में हर 343 है।

$343 = 7 \times 7 \times 7$

स्पष्ट है, 343 के अभाज्य गुणनखंड 2 और 5 के अतिरिक्त है।

इसलिए, $\frac{29}{343}$ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है; उत्तर।

7	343
7	49
7	7
	1

प्रश्न 12. बताइए कि $\frac{23}{2^3 5^2}$ परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार सांत या असांत आवर्ती है।

हल : $\frac{23}{2^3.5^2}$ में

स्पष्ट है, $2^3.5^2$ हर में केवल 2 और 5 अभाज्य गुणनखंड हैं।

इसलिए, $\frac{23}{2^3.5^2}$ का दशमलव प्रसार सांत है; उत्तर।

प्रश्न 13. अभाज्य गुणनखण्ड द्वारा 510 और 92 का म० स० ल० स० ज्ञात कीजिए। (2013C

हल :

2	510
3	255
5	85
17	17
	1

2	92
2	46
23	23
	1

$510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$ और $92 = 2 \times 2 \times 23$

$\therefore$ 510 और 92 का LCM $= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23 = 234$

और 510 और 92 का HCF = 2. उत्तर।

प्रश्न 14. 156 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखि (M. Q., Set–III : 201

हल :

2	156
2	78
3	39
13	13
	1

$\therefore \quad 156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13 = 2^2 \times 3 \times 13$; उत्तर।

प्रश्न 15. 3825 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखिए।

हल :

3	3825
3	1275
5	425
5	85
17	17
	1

$\therefore \quad 3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17 = 3^2 \times 5^2 \times 17$; उत्तर।

प्रश्न 16. 5005 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखिए।

हल :

5	5005
7	1001
11	143
13	13
	1

$\therefore \quad 5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$; उत्तर।

प्रश्न 17. 7429 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखिए।

हल :

17	7429
19	437
23	23
	1

$\therefore \quad 7429 = 17 \times 19 \times 23$; उत्तर।

प्रश्न 18. 140 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखिए। (2013A)

हल :

2	140
2	70
5	35
7	7
	1

$\therefore \quad 140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 5 \times 7$; उत्तर।

प्रश्न 19. बताइए कि $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार सांत है या असांत आवर्ती है।

हल : $\frac{129}{2^2 . 5^7 . 7^5}$ में

स्पष्ट है, हर $2^2 . 5^7 . 7^5$ में अभाज्य गुणनखंड 2 और 5 के अतिरिक्त भी है।

इसलिए, इस परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होगा; उत्तर।

प्रश्न 20. $3\frac{3}{8}$ का दशमलव प्रसार ज्ञात करें। (2017A)

हल : $\frac{27}{8} = \frac{27}{2^3 \times 5^0}$ जो $\frac{P}{2^n 5^m}$ रूप का है। उत्तर।

प्रश्न 21. बताइए कि $\frac{35}{50}$ परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार सांत है या असांत आवर्ती है।

हल : $\frac{35}{50}$ में, हमारे पास है $50 = 2 \times 5 \times 5$

हर में केवल 2 और 5 अभाज्य गुणनखंड है।

इसलिए, $\frac{35}{50}$ का दशमलव प्रसार सांत है; उत्तर।

प्रश्न 22. बिना लम्बी विभाजन प्रक्रिया किए बताइए कि $\frac{7}{80}$ परिमेय संख्या के दशमलव प्रसार सांत है या असांत आवर्ती है। (2011A)

हल : $\frac{7}{80}$ में हर 80 है

$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$

स्पष्ट है 80 के 2 और 5 अभाज्य गुणनखण्ड हैं।

$\therefore \quad \frac{7}{80}$ का दशमलव प्रसार सांत है; उत्तर।

2	80
2	40
2	20
2	10
5	5
	1

प्रश्न 23. अभाज्य गुणनखण्ड विधि से 8, 9 और 25 का म० स० और ल० स० निकालें। (M. Q., Set–IV : 2015, 2015A)

हल : $8 = 2 \times 2 \times 2; \quad 9 = 3 \times 3; \quad 25 = 5 \times 5$

$\therefore$ HCF (8, 9, 25) = 1 तथा LCM = $8 \times 9 \times 25 = 1800$. उत्तर।

प्रश्न 24. दो संख्याओं का ल० स० और म० स० क्रमशः 20 और 5 है तथा दूसरी संख्या 5 है तो पहली संख्या निकालें। (M. Q., Set–IV : 2015)

हल : पहली संख्या $= \frac{20 \times 5}{5} = 20$.

प्रश्न 25. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा 6, 8, 22 का म० स० और ल० स० ज्ञात कीजिए। (2014A)

हल : सर्वप्रथम हम अभाज्य गुणनखण्ड की संख्याओं को लिखते हैं।

$6 = 2 \times 3; \quad 8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3; \quad 22 = 2 \times 11$

L.C.M. $= 2^3 \times 3 \times 11 = 264$; H.C.F. $= 2$. उत्तर।

प्रश्न 26. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा 9, 12 तथा 27 का म० स० और ल० स० ज्ञात कीजिए। (2014A)

हल : 9, 12 और 27 के अभाज्य गुणनखण्ड हैं–

$9 = 3 \times 3 = 3^2; \quad 12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3; \quad 27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

HCF (9, 12 और 27) = 3

LCM (9, 12 और 27) $= 2^2 \times 3^3 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$ उत्तर।

प्रश्न 27. परिमेय $\frac{73}{2^4 \times 5^3}$ संख्या का दशमलव विस्तार दशमलव के कितने स्थानों के बाद सांत हो जावेगा। (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : $\frac{73}{2^4 \times 5^3} = \frac{73}{2 \times (2^3 \times 5^3)} = \frac{73}{2} \times \frac{1}{10^3}$

$= \frac{36.5}{10^3} = .0365$ दशमलव के 4 स्थान के बाद

प्रश्न 28. अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा 96 तथा 404 का म० स० ज्ञात करें एवं उससे उनका ल० स० भी ज्ञात करें। (2011A, 2017A)

हल : 96 का अभाज्य गुणनखंड $= 2^5 \times 3$,

404 का अभाज्य गुणनखंड $= 2^2 \times 101$,

$\therefore$ HCF = 4 तथा LCM = 9696, उत्तर।

प्रश्न 29. अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा 15, 12 और 21 संख्याओं के HCF और LCM ज्ञात कीजिए। (2013A, M. Q., Set–III : 2016)

हल : सर्वप्रथम हम अभाज्य गुणनखंड की दी हुई संख्याओं को लिखते हैं।

$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$, $15 = 3 \times 5$ और $21 = 3 \times 7$

$\therefore$ LCM $= 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$ और HCF = 3; उत्तर।

प्रश्न 30. HCF (306, 657) = 9 दिया है, LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए। (M. Q., Set–II : 2011)

हल : हम जानते हैं कि दो संख्याओं के HCF और LCM का गुणनफल दी हुई संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है।

$\therefore$ HCF (306, 657) × LCM (306, 657) = 306 × 657

$\Rightarrow \quad 9 \times$ LCM (306, 657) $= 306 \times 657$

$\Rightarrow$ LCM (306, 657) $= \frac{306 \times 657}{9} = 22338$. उत्तर।

प्रश्न 31. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा 7, 11, 19 का म० स० और ल० स० ज्ञात कीजिए। (2014C, MQ 2017)

हल : सर्वप्रथम हम दी हुई संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड लिखते हैं।

$7 = 7,\ 11 = 11$ और $19 = 19$

∴ ल० स० $= 7 \times 11 \times 19 = 1463$ और म० स० $= 1$. उत्तर।

प्रश्न 32. यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का उपयोग कर 4052 और 12576 का HCF (म० स०) ज्ञात करें। (M. Q., Set–IV : 2011)

हल :

4052)12576(3
12156
420
420)4052(9
3780
272
272)420(1
272
148
148)272(1
148
124
124)148(1
124
24
24)124(5
120
4
4)24(6
24
×

म० स० = 4

प्रश्न 33. यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कर 196, 3822 का H.C.F. (म० स०) ज्ञात कीजिए। (M. Q., Set–I : 2011)

हल : $3822 = 196 \times 19 + 98$; शेष $= 98$; $196 = 98 \times 2 + 0$

H.C.F. (म० स०) = 98. उत्तर।

प्रश्न 34. संख्याएँ 867 और 255 का म० स० ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए। (2012C, 2013C, M. Q., Set–V : 2016, 2017A)

हल : $867 = 255 \times 3 + 102$; $255 = 102 \times 2 + 51$

$102 = 51 \times 2 + 0$ अत: H.C.F. = 51

प्रश्न 35. क्या $7 \times 11 \times 13 + 13$ और $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 + 5$ विभाज्य संख्यायें हैं ? कैसे ? (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : $7 \times 11 \times 13 + 13 = 13[7 \times 11 + 1] = 13 \times 78$

$= 13 \times 2 \times 39 = 13 \times 2 \times 13 \times 3$

$= (13)^2 \times 6$

$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 + 5 = 5(7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 + 1)$

$= 5(1008 + 1) = 5 \times 1009$

∴ विभाज्य संख्याएँ हैं।

प्रश्न 36. अभाज्य गुणनखण्ड विधि से 26 एवं 91 का ल० स० और म० स० ज्ञात करें। (2016A)

हल : $26 = 2 \times 13$; $91 = 7 \times 13$

H.C.F (26, 91) = 13

L.C.M (26, 91) $= 2 \times 7 \times 13 = 182$ उत्तर।

प्रश्न 37. संख्याएँ 135 और 225 का H.C.F. ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म तकनीक का प्रयोग करें। (2012A, M. Q. Set–I & V : 2015, M. Q., Set–II : 2016)

हल : दोनों पूर्णांक में 225 बड़ा है; इसलिए 225 से प्रारंभ करते हैं।

$225 = 135 \times 1 + 90$; $135 = 90 \times 1 + 45$

$90 = 45 \times 2 + 0$

चूँकि शेष 0 प्राप्त हो गया और इस चरण का भाजक 45 है।

अत: 135 और 225 का म० स० 45 है। उत्तर।

प्रश्न 38. दो पात्रों में 504 लीटर और 735 लीटर दूध है। पात्र की महत्तम धारिता क्या होगी, जो दोनों पात्रों के दूध को पूर्ण रूप से माप सके? (2015)

हल : यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$735 = 504 \times 1 + 231$; $504 = 231 \times 2 + 42$

$231 = 42 \times 5 + 21$ $42 = 21 \times 2 + 0$

∴ H.C.F. (504, 735) = 21. उत्तर।

प्रश्न 39. अभाज्य गुणनखण्ड विधि से 336 और 54 का म० स० और ल० स० निकालें। (2015C)

हल :

2	336
2	168
2	84
2	42
3	21
	7

2	54
3	27
3	9
	3

$336 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$

$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$

∴ 336 और 54 का LCM

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 = 3024$

और 336 और 54 का HCF $= 2 \times 3 = 6$

∴ LCM = 3024 तथा HCF = 6. उत्तर।

प्रश्न 40. 196 और 38220 संख्याओं का म० स० ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए। (M. Q., Set–V : 2011)

हल :

196) 38220(194
196
1862
1764
980
784
196
196)196(1
196
×

म० स० = 196. उत्तर।

प्रश्न 41. 336 और 54 को यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म विधि से HCF (म० स०) निकालें। (M. Q., Set-II : 2015, MQ 2017)

हल :

54)336(6
324
×12)54(4
48
6)12(2
12
0

$336 = 54 \times 6 + 12$

$54 = 12 \times 4 + 6$

$12 = 6 \times 2 + 0$

∴ HCF = 6. उत्तर।

प्रश्न 42. क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए 6^n अंक 0 पर समाप्त हो सकता है? (M. Q., Set–III : 2015, M. Q., Set–III & V : 2016)

हल : यदि 6^n, 0 पर समाप्त होता है तो वह 5 से विभाज्य होगी; किन्तु 6^n के अभाज्य गुणनखंड 2 और 3 है। हम जानते हैं गणित का मौलिक नियम कि अभाज्य गुणनखंड का प्रत्येक संख्या अद्वितीय (एक और केवल एक) होता है।

अत: 6^n शून्य पर अंत नहीं हो सकता है।

प्रश्न 43. किसी परेड में 616 सदस्यों वाली एक सेना (आर्मी) की टुकड़ी को 32 सदस्यों वाले एक आर्मी बैंड के पीछे मार्च करना है। दोनों समूहों को समान संख्या वाले स्तंभों में मार्च करना है। उन स्तंभों की अधिकतम संख्या क्या है, जिसमें वे मार्च कर सकते हैं ? (TBQ)

हल : स्तंभों की अधिकतम संख्या ज्ञात करने के लिए, हमें 616 तथा 32 का HCF ज्ञात करना है।

$$\begin{array}{r} 32\overline{)616}(19 \\ \underline{32} \\ 296 \\ \underline{288} \\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\overline{)32}(4 \\ \underline{32} \\ 0 \end{array}$$

$\Rightarrow 616 = 32 \times 19 + 8 \quad \Rightarrow 32 = 8 \times 4 + 0$

$\therefore$ 616 तथा 32 का HCF 8 है।

इसलिए, स्तंभों की अधिकतम संख्या 8 है। उत्तर।

प्रश्न 44. किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में सोनिया को 18 मिनट लगते हैं, जबकि इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में रवि को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारंभ करके एक ही दिशा में चलते हैं। कितने समय बाद वे पुनः प्रारंभिक स्थान पर मिलेंगे ?

(M. Q., Set–I : 2011)

हल : यह ज्ञात करने के लिए कि पुनः दोनों कितने मिनट के बाद प्रारंभिक बिंदु पर मिलेंगे, हमें 18 और 12 का LCM ज्ञात करना होगा।

2	18
3	9
3	3
	1

2	12
2	6
3	3
	1

$18 = 2 \times 3 \times 3$ और $12 = 2 \times 2 \times 3$

18 और 12 का LCM $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

सोनिया और रवि पुनः प्रारंभिक बिंदु पर 36 मिनट बाद मिलेंगे। उत्तर।

प्रश्न 45. दर्शाइए कि एक धनात्मक विषम पूर्णांक $4q + 1$ या $4q + 3$ के रूप में होता है, जहाँ q एक पूर्णांक है। (M. Q., Set–V : 2011)

हल : मान लिया भाज्य $= a$, भाजक $b = 4$, भागफल $= q$ तथा शेषफल $= r$

जहाँ $0 \le r < 4$ तब शेषफल $= 0, 1, 2, 3$

एल्गोरिथ्म विभाजन द्वारा—

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$a = bq + r$

धनात्मक पूर्णांक $a_1 = 4q + 0 = 4q$ (समपूर्णांक, 2 से विभाज्य)

$a_2 = 4q + 1$ (विषम पूर्णांक 2 से अविभाज्य)

$a_3 = 4q + 2$ (समपूर्णांक, 2 से विभाज्य)

$a_4 = 4q + 3$ (विषम पूर्णांक, 2 से अविभाज्य)

अतः धनात्मक विषम पूर्णांक $= 4q + 1$ या $4q + 3$. Proved.

प्रश्न 46. दर्शाइये कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$ के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

(M. Q., Set–III : 2011)

हल : माना a कोई धनात्मक पूर्णांक है और $b = 6$ तब यूक्लिड की एल्गोरिथ्म से $a = 6q + r$ किसी पूर्णांक $q \ge 0$ के लिए और जहाँ $0 \le r < 6$, संभवतः शेष $0, 1, 2, 3, 4, 5$ हैं।

a के मान $6q$ या $6q + 1$ या $6q + 2$ या $6q + 3$ या $6q + 4$ या $6q + 5$ हो सकते हैं, जहाँ q कोई भाज्य है।

यदि $a = 6q$ या $6q + 2$ या $6q + 4$, तब a एक समपूर्णांक है। पूर्णांक सम या विषम हो सकता है। इसलिए, कोई विषम पूर्णांक $6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$ के रूप में हो सकता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है Proved.

प्रश्न 47. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(M. Q., Set–V : 2011, 2012C, 2014A, M. Q., Set–III : 2016, 2017A)

हल : माना $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या है ...(1)

जहाँ p तथा q पूर्णांक हैं $(q > 1)$ और इनका कोई सार्वभाजक नहीं है।

$$\therefore \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 3 \qquad \Rightarrow \frac{p^2}{q} = 3q \qquad ...(2)$$

अब स्पष्ट है कि $3q$ एक पूर्णांक संख्या है।

दूसरी ओर p और q का कोई सार्वभाजक नहीं है, अतः p^2 और q का कोई सार्वभाजक नहीं है और $q > 1$, इसलिए $\frac{p^2}{q}$ पूर्णांक से पृथक् कोई भिन्न है। अतः $\frac{p^2}{q} \ne 3q$ जो समीकरण (2) का अन्तर्विरोध है। इससे सिद्ध होता है कि हमारी कल्पना (1) गलत है। अतः $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।

$\Rightarrow \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। उत्तर।

प्रश्न 48. सिद्ध करें कि $\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या है। (2014C)

हल : माना कि $\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या है। अर्थात् हम दो पूर्णांक a और b $(b \ne 0)$ प्राप्त कर सकते हैं कि $\sqrt{7} = \frac{a}{b}$ है।

यदि a और b में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड हो, तो हम उस उभयनिष्ठ गुणनखंड से भाग देकर a और b को सहअभाज्य बना सकते हैं। अतः $b\sqrt{7} = a$ है।

दोनों पक्षों को वर्ग करने पर हमें $7b^2 = a^2$ ...(i) प्राप्त होता है।

अतः a^2, 7 से विभाजित है। इसलिए 7, a को भी विभाजित करेगा।

माना कि $a = 7c$, जहाँ c एक पूर्णांक है।

a का मान समीकरण (i) में रखने पर—

$7b^2 = (7c)^2$; $7b^2 = 49c^2$; $b^2 = 7c^2$

b^2, 7 से विभाजित है। इसलिए 7, b को भी विभाजित करेगा।

अतः a और b में कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 7 है। परन्तु इससे तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a और b सहअभाज्य है। हमें यह विरोधाभास अपनी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण प्राप्त हुआ कि $\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या है। अतः निष्कर्ष प्राप्त हुआ कि $\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 49. सिद्ध करें $2+\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या नहीं है ?

(M. Q., Set–III : 2015)

हल : संभव हो, तो माना कि $2+\sqrt{5}$ परिमेय संख्या है

$$2+\sqrt{5} = \frac{p}{q}, \text{ जहाँ } q \ne 0 \qquad ...(1)$$

$$\therefore \sqrt{5} = \frac{p}{q} - 2 \qquad ...(2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{p-2q}{q} \qquad \therefore \text{ p और q पूर्णांक है।}$$

$\therefore$ p – 2q और q पूर्णांक होंगे।

किन्तु समीकरण (2) का दायाँ पक्ष परिमेय संख्या है और बायाँ पक्ष अपरिमेय। हम देखते हैं कि यह विरोधाभास है।

हमारी यह मान्यता कि $2+\sqrt{5}$ परिमेय संख्या है, गलत है।

अतः $2+\sqrt{5}$ अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 50. सिद्ध करें कि $5-\sqrt{3}$ अपरिमेय है।

(2011C, M. Q. Set–IV : 2015, 2015A)

हल : मान लें कि $5-\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या r है,

तो $5-\sqrt{3}=r$ या, $5-r=\sqrt{3}$ ...(1)

अब $5-r$ दो परिमेय संख्याओं का अंतर होने के कारण परिमेय है।

अत: (1) से, परिमेय संख्या = अपरिमेय संख्या जो असंभव है। अत: हमारी मान्यता गलत है, अर्थात् $5-\sqrt{3}$ परिमेय नहीं है, इसलिए अपरिमेय है।

प्रश्न 51. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का घन $9m$, $9m+1$ या $9m+8$ के रूप का होता है।

हल : माना x कोई एक धनात्मक पूर्णांक है। तब यह $3m$, $3m+1$ या $3m+2$ के रूप में होगा। हमें सिद्ध करना है कि इन प्रत्येक का घन $9m$, $9m+1$ या $9m+8$ के रूप में लिखा जा सकता है।

अब, $(3m)^3=27m^3=9(3m^3)=9m$, जहाँ $m=3m^3$

$(3m+1)^3=(3m)^3+3(3m)^2.1+3(3m).1^2+1$

$=27m^3+27m^2+9m+1=9(3m^3+3m^2+m)+1$

$=9m+1$, जहाँ $m=3m^3+3m^2+m$

और $(3m+2)^3=(3m)^3+3(3m)^2.2+3(3m).2^2+8$

$=27m^3+54m^2+36m+8$

$=9(3m^3+6m^2+4m)+8$

$=9m+8$, जहाँ $m=3m^3+6m^2+4m$ Proved.

प्रश्न 52. सिद्ध कीजिए कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(2012A, 2013C, M. Q. Set–I : 2015)

हल : हमें सिद्ध करना है कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इसके विपरीत हमने मान लिया कि $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

तब हम मान सकते हैं कि $3+2\sqrt{5}=\frac{a}{b}$, जहाँ a और b सह-अभाज्य पूर्णांक है और $b\neq 0$

$\Rightarrow 2\sqrt{5}=\frac{a}{b}-3$ या, $\sqrt{5}=\frac{a}{2b}-\frac{3}{2}$

$\because$ a और b पूर्णांक हैं।

$\therefore$ $\frac{a}{2b}-\frac{3}{2}$ एक परिमेय संख्या है।

$\Rightarrow$ $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या है।

परंतु $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

यह दर्शाता है कि हमने जो माना था वह गलत है।

इसलिए, $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है Proved.

प्रश्न 53. सिद्ध करें कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(2014A, 2015A)

हल : यदि संभव हो तो माना कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है; तो $\sqrt{5}=\frac{p}{q}$ होगा, जहाँ p और $q\neq 0$ पूर्णांक है और p, q में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।

$\therefore$ $q\sqrt{5}=p$ या, $5q^2=p^2$

या, $\frac{p^2}{5}=q^2=$ पूर्णांक।

$\therefore$ p^2, 5 से विभाजित होगा।

अत: p, 5 से विभाजित होगा, क्योंकि 5 एक अभाज्य संख्या है।

माना कि $p=5r$, जहाँ r एक पूर्णांक है।

तो $q^2=\frac{p^2}{5}=\frac{(5r)^2}{5}=5r^2$

$\therefore$ $\frac{q^2}{5}=r^2=$ पूर्णांक।

$\therefore$ q^2, 5 से विभाजित होगा। अत: q, 5 से विभाजित होगा।

इस प्रकार p और q में कम-से-कम एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 5 है। विरोधाभास है, क्योंकि p, q में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं था। अत: को परिमेय संख्या मानना गलत था।

$\therefore$ $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। उत्तर

प्रश्न 54. दर्शाइए कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है। (2011

हल : माना कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है जो कि विपरीत स्थिति है हम अभाज्य पूर्णांक p और q प्राप्त कर सकते हैं $(q\neq 0)$

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{p}{q}$ $\Rightarrow$ $\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{p}{q}$

$\Rightarrow$ $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{p}{q}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{2}=\frac{2p}{q}$

p और q पूर्णांक हैं, $\frac{2p}{q}$ परिमेय संख्या है और इसलिए $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या

लेकिन यह कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या विरोधाभास है।

इसलिये यह निष्कर्ष निकलता है कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ अपरिमेय संख्या है Proved

प्रश्न 55. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि कि धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक m के लिए $3m$ या $3m+1$ के रू में होता है।

संकेत : यह मान लीजिए कि x कोई धनात्मक पूर्णांक है। तब, यह $3q$, $3q+1$ या $3q+2$ के रूप में लिखा जा सकता है। इनमें से प्रत्येक का वर्ग कीजि और दर्शाइए कि इन वर्गों को $3m$ या $3m+1$ के रूप में लिखा जा सकता है

हल : माना x कोई एक धनात्मक पूर्णांक है तब यह $3q$, $3q+1$ या $3q+$ के रूप में होगा। अब हमें सिद्ध करना है कि प्रत्येक वर्ग $3m$ या $3m+$ के रूप में लिखा जा सकता है।

अब, $(3q)^2=9q^2=3(3q^2)=3m$, जहाँ $m=3q^2$

$(3q+1)^2=9q^2+6q+1=3(3q^2+2q)+1=3m+1$

जहाँ $m=3q^2+$

और $(3q+2)^2=9q^2+12q+4=3(3q^2+4q+1)+1=3m+$

जहाँ $m=3q^2+4q+1$ Proved.

प्रश्न 56. सिद्ध करें कि $4-\sqrt{5}$ एक अपरिमेय है। (2016

हल : माना कि $4-\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अत: $4-\sqrt{5}=\frac{a}{b}$ होगा जहाँ a और $b\,(b\neq 0)$ पूर्णांक है और a तथा में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं होगा।

$\therefore$ $4-\frac{a}{b}=\sqrt{5}$

$\therefore$ $\sqrt{5}=\frac{4b-a}{b}=$ परिमेय संख्या।

लेकिन $\sqrt{5}$ अपरिमेय संख्या है, अत: $4-\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है मानना गलत है।

$\therefore$ $4-\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। Proved.

प्रश्न 57. सिद्ध करें कि $3+\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। (2016A)

हल : यदि संभव हो तो माना कि $3+\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अत:, $3+\sqrt{5}=\frac{a}{b}$, जहाँ a और $b\neq 0$ पूर्णांक है और a तथा b में कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$\therefore \quad \sqrt{5}=\frac{a}{b}-3=\frac{a-3b}{b}=\text{परिमेय संख्या}$$

लेकिन $\sqrt{5}$ अपरिमेय संख्या है, अत: $3+\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है; यह मानना गलत सिद्ध होता है।

$\therefore$ $3+\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। Proved.

प्रश्न 58. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(2011A, 2011C, M. Q. Set–II & V : 2015, 2015C, M. Q., Set–II : 2016)

हल : माना कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है अर्थात् हम दो पूर्णांक a और b $(b\neq 0)$ प्राप्त कर सकते हैं कि $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ है।

यदि a और b में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड हो, तो हम उस उभयनिष्ठ गुणनखंड से भाग देकर a और b को सहअभाज्य बना सकते हैं। अत: $b\sqrt{2}=a$ है।

दोनों पक्षों को वर्ग करने पर हमें $2b^2=a^2$ ...(i) प्राप्त होता है।

अत: a^2, 2 से विभाजित है।

इसलिए 2, a को भी विभाजित करेगा।

माना कि $a=2c$, जहाँ c एक पूर्णांक है।

a का मान समीकरण (i) में रखने पर—

$2b^2=(2c)^2$; $2b^2=4c^2$; $b^2=2c^2$

b^2, 2 से विभाजित है। इसलिए 2, b को भी विभाजित करेगा।

अत: a और b में कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 2 है। परन्तु इससे तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a और b सहअभाज्य है। हमें यह विरोधाभास अपनी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण प्राप्त हुआ कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। अत: निष्कर्ष प्राप्त हुआ कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

बहुपद

प्रश्न 1. बहुपद $4x^2y^2$ का घात निकालें। (M. Q., Set–II : 2011)

हल : x तथा y में 2 घात का बहुपद।

प्रश्न 2. $x^2=9$ का हल समुच्चय लिखें। (2012A)

हल : $\because x=\sqrt{9}=\pm 3$ $\therefore$ 3, –3 उत्तर।

प्रश्न 3. $2x^2+3x+1$ को $x+2$ से भाग दीजिए तथा भागफल एवं शेषफल लिखिए।

हल :
$$\begin{array}{r} x+2\,)\,2x^2+3x+1\,(\,2x-1 \\ 2x^2+4x \\ \hline -x+1 \\ -x-2 \\ \hline 3 \end{array}$$

भागफल = $2x-1$

शेषफल = 3

प्रश्न 4. समीकरण $x+y=6$ के कितने हल होंगे ..... । (2016C)

हल : अनंत।

प्रश्न 5. यदि बहुपद x^3-3x^2+x+1 के शून्यक $a-b$, a, $a+b$ हों, तो a और b का मान ज्ञात कीजिए। (2012C)

हल : शून्यक का योग $=\frac{-x^2 \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

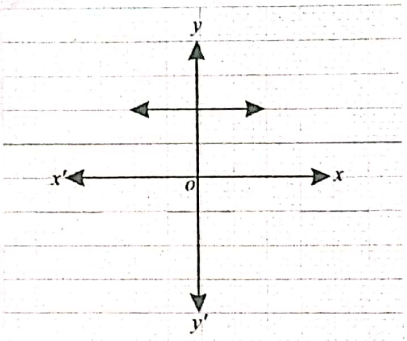
$$\therefore \quad a-b+a+a+b=\frac{-(-3)}{1}=3$$

$\therefore$ $a=1$

शून्यक का गुणनफल $=\frac{\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

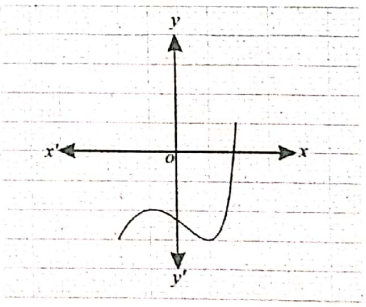
$(a-b)\,a\,(a+b)=-1$ $\therefore$ $b=1$ उत्तर।

प्रश्न 6. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $y=p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति में दिया गया है, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या लिखिए।



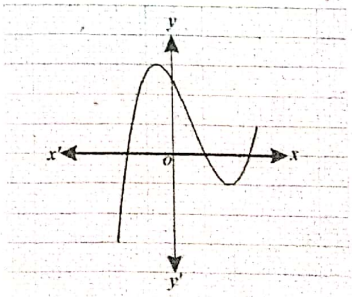
हल : ग्राफ से यह स्पष्ट है कि यह x-अक्ष को किसी भी बिंदु पर नहीं मिलता है। अत: इसका कोई भी शून्यक नहीं है।

प्रश्न 7. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $y=p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति में दिया गया है, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या लिखिए।



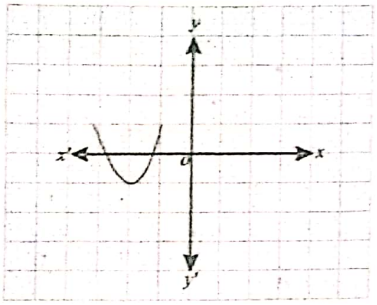
हल : ग्राफ से यह स्पष्ट है कि यह x-अक्ष को केवल एक बिंदु पर मिलता है। अत: इसके शून्यक की संख्या एक है।

प्रश्न 8. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $y=p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति में दिया गया है, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या लिखिए।



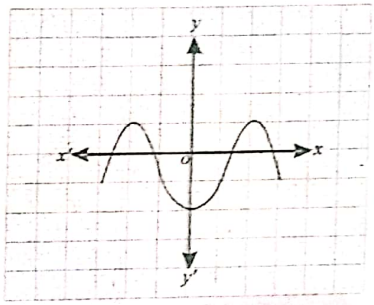
हल : ग्राफ से यह स्पष्ट है कि यह x-अक्ष को तीन बिंदुओं पर मिलता है। अत: इसके शून्यकों की संख्या तीन है।

प्रश्न 9. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति में दिया गया है, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या लिखिए।



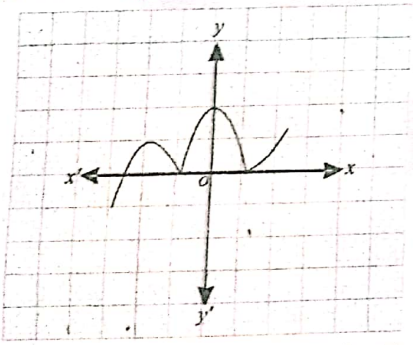
हल : ग्राफ से यह स्पष्ट है कि यह x-अक्ष को दो विंदुओं पर मिलता है।
अत: इसके शून्यकों की संख्या दो है।

प्रश्न 10. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति में दिया गया है, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या लिखिए।
(M. Q., Set–II : 2015)



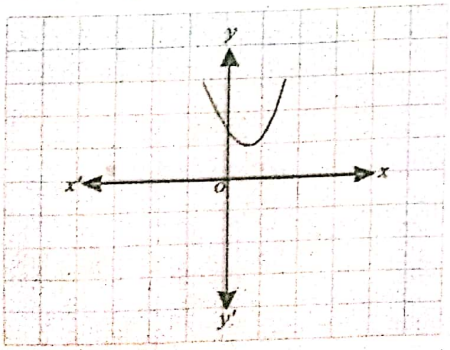
हल : ग्राफ से यह स्पष्ट है कि यह x-अक्ष को चार विंदुओं पर मिलता है।
अत: इसके शून्यकों की संख्या चार है।

प्रश्न 11. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति में दिया गया है, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या लिखिए।



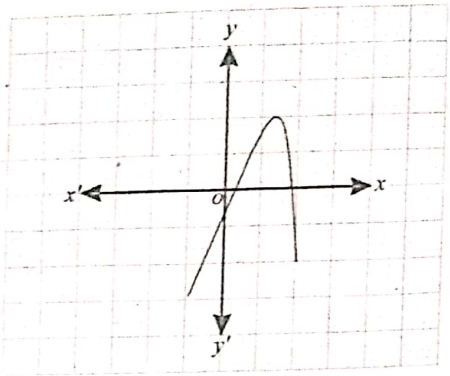
हल : ग्राफ से यह स्पष्ट है कि यह x-अक्ष को तीन विंदुओं पर मिलता है।
अत: इसके शून्यकों की संख्या तीन है।

प्रश्न 12. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति में दिया गया है, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या लिखिए।



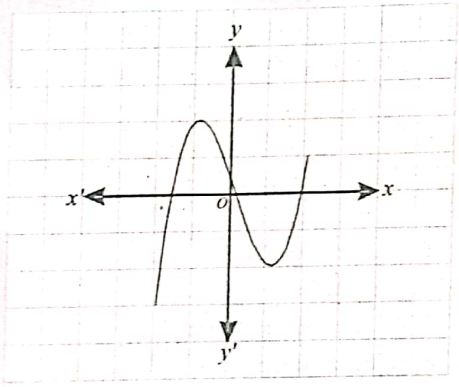
हल : शून्यकों की संख्या = 0.

प्रश्न 13. किस बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ नीचे आ... में दिया गया है, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या लिखिए।



हल : शून्यकों की संख्या = 2.

प्रश्न 14. किस बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ नीचे आ... में दिया गया है, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या लिखिए।



हल : शून्यकों की संख्या = 3.

प्रश्न 15. $6x^2 - 3 - 7x$ द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए ... शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : $6x^2 - 3 - 7x$ द्विघात बहुपद है।

$$6x^2 - 3 - 7x = 6x^2 - 7x - 3 \qquad S = -7$$
$$= 6x^2 - 9x + 2x - 3 \qquad P = 6 \times -3 = -18$$
$$= 3x(2x - 3) + 1(2x - 3)$$
$$= (2x - 3)(3x + 1)$$

$6x^2 - 3 - 7x$ का मान शून्य है

यदि $(2x - 3) = 0$ यदि $3x + 1 = 0$

या, $x = \frac{3}{2}$ या, $x = \frac{-1}{3}$

अत: $6x^2 - 3 - 7x$ के शून्यक $\frac{3}{2}$ और $\frac{-1}{3}$ हैं; उत्तर।

अब, शून्यकों का योग $= \frac{3}{2} + \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{9-2}{6}$

$$= \frac{7}{6} = \frac{-(-7)}{6} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

शून्यकों का गुणनफल $= \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-3}{6} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

अत:, शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध को सत्यापित किया जाता है

प्रश्न 16. यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ के दो शून्यक $2 \pm \sqrt{3}$ हों, तो अन्य शून्यक ज्ञात करें। (2012A)

हल : चूँकि दिया गया है $(2+\sqrt{3})$ और $(2-\sqrt{3})$ बहुपद के शून्यक हैं।

$\therefore \{x-(2+\sqrt{3})\}$ तथा $\{x-(2-\sqrt{3})\}$ दिये गये बहुपद के गुणनखंड है।

या, $\{x^2-(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3})x+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\}$

या x^2-4x+1 दिये गये बहुपद का गुणनखंड हैं।

पुन: दिये गये बहुपद और x^2-4x+1 पर विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करने पर;

$$x^2-4x+1)\ x^4-6x^3-26x^2+138x-35\ (x^2-2x-35$$

$x^4-4x^3+x^2$

$-\quad +\quad -$

$-2x^3-27x^2+138x-35$

$-2x^3+8x^2-2x$

$+\quad -\quad +$

$-35x^2+140x-35$

$-35x^2+140x-35$

$+\quad -\quad +$

0

$\therefore\ x^4-6x^3-26x^2+138x-35$

$=(x^2-4x+1)(x^2-2x-35)$

$=(x^2-4x+1)(x^2-7x+5x-35)$

$=(x^2-4x+1)\{x(x-7)+5(x-7)\}$

$=(x^2-4x+1)(x-7)(x+5)$

अत: $(x-7)(x+5)$ बहुपद के गुणनखंड होंगे।

$\therefore\ x=7,-5$ बहुपद के अन्य शून्यक हैं। उत्तर।

प्रश्न 17. $4s^2-4s+1$ द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : $4s^2-4s+1$ द्विघात बहुपद है।

$4s^2-4s+1=4s^2-2s-2s+1 \qquad S=-4$

$=2s(2s-1)-1(2s-1) \qquad P=4\times1=4$

$=(2s-1)(2s-1)$

$4s^2-4s+1$ का मान शून्य है।

यदि $(2s-1)=0$ यदि $(2s-1)=0$

या, $s=\frac{1}{2}$ या, $s=\frac{1}{2}$

अत: $4s^2-4s+1$ के शून्यक $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{2}$ हैं; उत्तर।

अब शून्यकों का योग $=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1=\frac{-(-4)}{4}=\frac{-s \text{ का गुणांक}}{s^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}=\frac{\text{अचर पद}}{s^2 \text{ का गुणांक}}$

अत: शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध का सत्यापन किया जाता है।

प्रश्न 18. $4u^2+8u$ द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : द्विघात बहुपद है $4u^2+8u=4u(u+2)$

$4u^2+8u$ का मान शून्य है

यदि $4u=0$ यदि $u+2=0$

या, $u=0$ या, $u=-2$

अत: $4u^2+8u$ के शून्यक 0 और -2 हैं; उत्तर।

अब, शून्यकों का योग $=0+(-2)=-2=\frac{-8}{4}=\frac{u \text{ का गुणांक}}{u^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $=(0)(-2)=0=\frac{0}{4}=\frac{\text{अचर पद}}{u^2 \text{ का गुणांक}}$

अत:, शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध को सत्यापित किया जाता है।

प्रश्न 19. t^2-15 द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : t^2-15 द्विघात बहुपद हैं, $t^2-15=t^2-\left(\sqrt{15}\right)^2=\left(t-\sqrt{15}\right)\left(t+\sqrt{15}\right)$

t^2-15 का मान शून्य है

यदि $t-\sqrt{15}=0$ यदि $t+\sqrt{15}=0$

या, $t=\sqrt{15}$ या, $t=-\sqrt{15}$

अत: t^2-15 के शून्यक $-\sqrt{15}$ और $\sqrt{15}$ हैं; उत्तर।

अब, शून्यकों का योग $=-\sqrt{15}+\sqrt{15}=0=\frac{0}{1}=\frac{-t \text{ का गुणांक}}{t^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $=\left(-\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{15}\right)=-15=\frac{\text{अचर पद}}{t^2 \text{ का गुणांक}}$

अत:, शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध को सत्यापित किया जाता है।

प्रश्न 20. $x^2 - 2x - 8$ द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : $x^2 - 2x - 8$ द्विघात बहुपद है।

$x^2 - 2x - 8 = x^2 - 4x + 2x - 8$ $\quad S = -2$

$= x(x-4) + 2(x-4)$ $\quad P = -8$

$= (x-4)(x+2)$

$x^2 - 2x - 8$ का मान शून्य है।

यदि $(x-4) = 0$ यदि $(x+2) = 0$

या, $x = 4$ या, $x = -2$

$x^2 - 2x - 8$ के शून्यक -2 और 4 हैं; उत्तर।

अब, शून्यकों का योग $= (-2) + (4) = 2 = \frac{-(-2)}{1} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

तथा शून्यकों का गुणनफल $= (-2)(4) = -8 = \frac{-8}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

अतः शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध का सत्यापन किया जाता है।

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म

प्रश्न 1. विरोधी समीकरण युग्म के कितने हल होते हैं? (2013A)

हल : कोई हल नहीं होता है।

प्रश्न 2. एक रैखिक समीकरण युग्म, जिसका कोई हल नहीं होता, क्या कहलाता है? (2011A)

हल : असंगत समीकरण।

प्रश्न 3. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि रैखिक समीकरण $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$ तथा $9x - 10y = 14$ के युग्म संगत हैं या असंगत। (2014A)

हल : $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$; $9x - 10y = 14$

$a_1 = \frac{3}{2}$, $b_1 = \frac{5}{3}$, $c_1 = 7$; $a_2 = 9$, $b_2 = -10$, $c_2 = 14$

$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{3}{2}}{9} = \frac{1}{6}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{\frac{5}{3}}{-10} = -\frac{1}{6}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

$\because \quad \frac{1}{6} \neq -\frac{1}{6}$, यानी $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

अतः, यह रैखिक समीकरणों का युग्म संगत है; उत्तर।

प्रश्न 4. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि रैखिक समीकरण $3x + 2y = 5$ तथा $2x - 3y = 7$ के युग्म संगत हैं या असंगत।

हल : $3x + 2y = 5$: $\quad 2x - 3y = 7$

$a_1 = 3$, $\quad b_1 = 2$, $\quad c_1 = 5$;

$a_2 = 2$, $\quad b_2 = -3$, $\quad c_2 = 7$

$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-3}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{5}{7}$

$\therefore \quad \frac{3}{2} \neq -\frac{2}{3}$, यानी $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

अतः यह रैखिक समीकरणों का युग्म संगत है; उत्तर।

प्रश्न 5. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि रैखिक समीकरण $2x - 3y = 8$ तथा $4x - 6y = 9$ के युग्म संगत हैं या असंगत। (2014A, M. Q. Set–II : 2015

हल : $2x - 3y = 8$; $4x - 6y = 9$

$a_1 = 2$, $b_1 = -3$, $c_1 = 8$; $a_2 = 4$, $b_2 = -6$, $c_2 = 9$

$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{8}{9}$

$\therefore \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{8}{9}$, यानी $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

अतः यह रैखिक समीकरणों का युग्म असंगत है; उत्तर।

प्रश्न 6. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि समीकरण युग्म $9x + 3y + 12 = 0$ तथा $18x + 6y + 24 = 0$ द्वारा निरूपित रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं, समांतर हैं अथवा संपाती हैं।

हल : प्रदत्त रैखिक समीकरण युग्म हैं,

$9x + 3y + 12 = 0$ ...(1)

और $18x + 6y + 24 = 0$ ...(2)

यहाँ, $\frac{9}{18} = \frac{3}{6} = \frac{12}{24}$ $\quad \left[\because \text{प्रत्येक अनुपात} = \frac{1}{2}\right.$

इसलिए (1) और (2) रेखाएँ संपाती हैं; उत्तर।

प्रश्न 7. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि समीकरण युग्म $6x - 3y + 10 = 0$ तथा $2x - y + 9 = 0$ द्वारा निरूपित रेखा एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं, समांतर हैं अथवा संपाती हैं।

हल : प्रदत्त रैखिक समीकरण युग्म हैं

$6x - 3y + 10 = 0$ ...(1)

और $2x - y + 9 = 0$ ...(2)

यहाँ, $\frac{6}{2} = \frac{-3}{-1} \neq \frac{10}{9}$

अतः (1) और (2) रैखिक समीकरण युग्म समांतर हैं; उत्तर।

प्रश्न 8. अनुपात $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ एवं $\frac{c_1}{c_2}$ का तुलना कर बतावें कि दिये गये समीकरण युग्म प्रतिच्छेदी हैं, समान्तर या सम्पाती है। $6x - 3y + 27 = 0$ और $2x - y + 9 = 0$. (M. Q., Set–I : 2016

हल: दिया गया समीकरण युग्म है :

$6x - 3y + 27 = 0$ तथा $2x - y + 9 = 0$

समीकरण युग्म $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ से तुलना करने पर,

$a_1 = 6$, $b_1 = -3$, $c_1 = 27$

$a_2 = 2$, $b_2 = -1$, $c_2 = 9$

$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{6}{2} = 3$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-1} = 3$ तथा $\frac{c_1}{c_2} = \frac{27}{9} = 3$

$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

अतः समीकरण युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं। अतः यह समीकरण युग्म संगत (आश्रित) है।

$\therefore$ दिये गये समीकरण युग्म संपाती होगा। उत्तर।

प्रश्न 9. प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए :

$$\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=0 \text{ तथा } \sqrt{3}x-\sqrt{8}y=0$$

अथवा, रैखिक समीकरण युग्म को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए :

$$\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=0,\ \sqrt{3}x-\sqrt{8}y=0 \quad (2012C)$$

हल : दिया गया समीकरण युग्म है,

$$\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=0 \quad ...(1)$$

और $\sqrt{3}x-\sqrt{8}y=0$ ...(2)

समीकरण (2) से,

$$\sqrt{8}y=\sqrt{3}x \quad \Rightarrow \quad y=\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{8}}$$

समीकरण (1) में $y=\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{8}}$ रखने पर,

$$\sqrt{2}x+\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{8}}\right)=0 \Rightarrow \sqrt{2}x+\frac{3x}{\sqrt{8}}=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{16}x+3x=0 \quad \Rightarrow \quad 4x+3x=0$$

$$\Rightarrow 7x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

समीकरण (1) में $x=0$ रखने पर,

$$0+\sqrt{3}y=0 \quad \Rightarrow \quad y=0$$

अत: $x=0$ तथा $y=0$; **उत्तर।**

प्रश्न 10. प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए :

$$0.2x+0.3y=1.3 \text{ तथा } 0.4x+0.5y=2.3.$$

हल : दिया गया समीकरण युग्म है :

$$0.2x+0.3y=1.3 \quad \Rightarrow \quad 2x+3y=13 \quad ...(1)$$

और $0.4x+0.5y=2.3 \quad \Rightarrow \quad 4x+5y=23$ ...(2)

समीकरण (2) से,

$$5y=23-4x \quad \Rightarrow \quad y=\frac{23-4x}{5}$$

समीकरण (1) में, $y=\frac{23-4x}{5}$ मान रखने पर,

$$2x+3\left(\frac{23-4x}{5}\right)=13$$

$$\Rightarrow 10x+69-12x=65$$

$$\Rightarrow -2x=-4 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

समीकरण (1) में $x=2$ रखने पर,

$$2\times 2+3y=13 \quad \Rightarrow \quad 3y=13-4=9$$

$$\Rightarrow y=\frac{9}{3}=3$$

अत: $x=2$ तथा $y=3$; **उत्तर।**

प्रश्न 11. प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए :

$$x+y=14 \text{ तथा } x-y=4.$$

हल : दिया गया समीकरण युग्म है,

$$x+y=14 \quad ...(1)$$

और $x-y=4$ ...(2)

समीकरण (1) से, $y=14-x$

समीकरण (2) में $y=14-x$ रखने पर,

$$x-(14-x)=4 \quad \Rightarrow \quad x-14+x=4$$

$$\Rightarrow 2x=4+14 \quad \Rightarrow \quad 2x=18$$

$$\Rightarrow x=9$$

समीकरण (1) में $x=9$ रखने पर,

$$9+y=14$$

$$\Rightarrow y=14-9 \quad \Rightarrow \quad y=5$$

अत: $x=9$ तथा $y=5$; **उत्तर।**

प्रश्न 12. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि रैखिक समीकरण $5x-3y=11$ तथा $-10x+6y=-22$ के युग्म संगत हैं या असंगत। (2014C)

हल : $5x-3y=11;\ -10x+6y=-22$

$$a_1=5, b_1=-3, c_1=11;\ a_2=-10, b_2=6, c_2=-22$$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{5}{-10}=-\frac{1}{2},\ \frac{b_1}{b_2}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2},\ \frac{c_1}{c_2}=\frac{11}{-22}=-\frac{1}{2}$$

$$\because \quad -\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}, \text{ यानी } \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

अत: यह रैखिक समीकरणों का युग्म संगत है; **उत्तर।**

प्रश्न 13. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि समीकरण युग्म $5x-4y+8=0$ तथा $7x+6y-9=0$ द्वारा निरूपित रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं, समांतर हैं अथवा संपाती हैं।

हल : प्रदत्त रैखिक समीकरण युग्म हैं,

$$5x-4y+8=0 \quad ...(1)$$

और $7x+6y-9=0$ ...(2)

यहाँ, $\frac{5}{7}\neq\frac{-4}{6}$

समीकरण (1) और (2) रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं; **उत्तर।**

प्रश्न 14. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि रैखिक समीकरण $\frac{4}{3}x+2y=8$ तथा $2x+3y=12$ के युग्म संगत हैं या असंगत।

हल : $\frac{4}{3}x+2y=8;\ 2x+3y=12$

$$a_1=\frac{4}{3}, b_1=2,\ c_1=8;\ a_2=2, b_2=3,\ c_2=12$$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{\frac{4}{3}}{2}=\frac{2}{3},\ \frac{b_1}{b_2}=\frac{2}{3},\ \frac{c_1}{c_2}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

$$\because \quad \frac{2}{3}=\frac{2}{3}=\frac{2}{3}, \text{ यानी } \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

अत:, यह रैखिक समीकरणों का युग्म संगत हैं **उत्तर।**

प्रश्न 15. प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए :

$$s-t=3 \text{ तथा } \frac{s}{3}+\frac{t}{2}=6$$

हल : दिया गया समीकरण युग्म है :

$$s-t=3 \quad ...(1)$$

$$\frac{s}{3}+\frac{t}{2}=6 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) से, $s=3+t$

समीकरण (2) में $s=3+t$ रखने पर,

$$\frac{3+t}{3}+\frac{t}{2}=6 \quad \Rightarrow \quad 2(3+t)+3t=36$$

$$\Rightarrow 6+2t+3t=36 \quad \Rightarrow \quad 5t=30$$

$$\Rightarrow t=6$$

समीकरण (1) में $t=6$ रखने पर,

$$s-6=3 \quad \Rightarrow \quad s=3+6=9$$

अत: $s=9$ तथा $t=6$; **उत्तर।**

प्रश्न 16. प्रतिस्थापन विधि से निम्न रैखिक समीकरण युग्म का हल करें :
$7x - 15y = 2$ और $x + 2y = 3$. (2015C)

हल : $7x - 15y = 2$ ... (i)

$x + 2y = 3$ ... (ii)

$\because \quad x + 2y = 3$

$\therefore \quad x = 3 - 2y$ ... (iii)

समीकरण (iii) का मान (i) में रखने पर,

$7(3 - 2y) - 15y = 2$

$\Rightarrow \quad 21 - 14y - 15y = 2 \quad \Rightarrow \quad 21 - 29y = 2$

$\Rightarrow \quad -29y = 2 - 21 = -19 \quad \therefore \quad y = \frac{19}{29}$

$x = 3 - 2y = 3 - \frac{2\times19}{29} = \frac{87-38}{29} = \frac{49}{29}$

$\therefore \quad x = \frac{49}{29}$

$y = \frac{19}{29}$ उत्तर।

प्रश्न 17. प्रतिस्थापन विधि से निम्न रेखीय समीकरण युग्म को हल करें। (2017A)

$8x + 5y = 9$

$3x + 2y = 4.$

हल : $8x + 5y = 9$ ... (i)

$3x + 2y = 4$ ... (ii)

समीकरण (i) से,

$8x + 5y = 9$

$8x = 9 - 5y$

$\therefore x = \frac{9-5y}{8}$ ... (iii)

समीकरण (ii) में (iii) का मान देने पर,

$3x + 2y = 4$

$\Rightarrow \quad \frac{3(9-5y)}{8} + 2y = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{27-15y}{8} + 2y = 4$

$\Rightarrow \quad \frac{27-15y+16y}{8} = 4 \quad \Rightarrow \quad 27 + y = 4 \times 8 = 32$

$\therefore \quad y = 32 - 27 = 5$

$x = \frac{9-5y}{8} = \frac{9-5\times5}{8} = \frac{9-25}{8} = \frac{-16}{8} = -2$

$\therefore \quad x = -2; y = 5.$

प्रश्न 18. हल करें : (M. Q., Set–III : 2011)

$2x + y = 10$

$3x - y = 5.$

हल : $2x + y = 10$ ...(1)

$3x - y = 5$ ...(2)

(1) + (2) से $5x = 15 \quad \therefore \quad x = 3$

x के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर,

$y = 10 - 2 \times 3 = 4$

$x = 3, \ y = 4.$ उत्तर।

प्रश्न 19. वज्र-गुणन विधि से हल कीजिए।

$x - 3y - 7 = 0$

$3x - 3y - 15 = 0.$

हल : प्रदत्त समीकरण युग्म है :

$x - 3y - 7 = 0$ तथा $3x - 3y - 15 = 0$

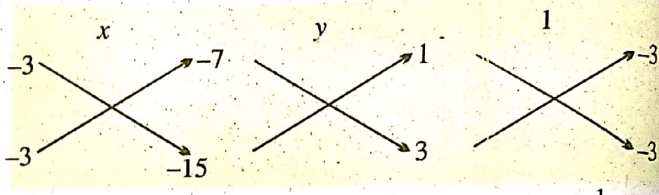
ये समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ के रूप में हैं

जहाँ $a_1 = 1, b_1 = -3, c_1 = -7$ तथा $a_2 = 3, b_2 = -3, c_2 = -15$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \ \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-3} = 1 \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

इसलिए प्रदत्त समीकरण निकाय का अद्वितीय हल है।

इसे वज्र गुणन विधि से हल करने पर :



$\frac{x}{(-3)(-15)-(-3)(-7)} = \frac{y}{(-7)\times3-(-15)\times1} = \frac{1}{-3-(-3)\times3}$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{45-21} = \frac{y}{-21+15} = \frac{1}{-3+9}$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{24} = \frac{y}{-6} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{24}{6} = 4, y = \frac{-6}{6} = -1$

अतः समीकरण निकाय का अद्वितीय हल $x = 4, y = -1$ है।

प्रश्न 20. हल कीजिए :

$\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$ तथा $\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1.$

हल : दिया गया समीकरण निकाय है,

$\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$ तथा $\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$

$u = \frac{1}{\sqrt{x}}$ तथा $v \quad \frac{1}{\sqrt{y}}$ रखने पर समीकरण,

$2u + 3v = 2$ ...(1)

तथा $4u - 9v = -1$ ...(2)

समीकरण (1) को 3 से गुणा करने पर,

$6u + 9v = 6$ ...(3)

समीकरण (2) व (3) का योग करने पर,

$10u = 5 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

समीकरण (1) में $u = \frac{1}{2}$ रखने पर,

$2 \times \frac{1}{2} + 3v = 2 \quad \Rightarrow \quad 3v = 1$

$\Rightarrow \quad v = \frac{1}{3}$

अब, $u = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x} = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 4$

तथा $v = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{y} = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 9$

अतः $x = 4$ तथा $y = 9$; उत्तर।

प्रश्न 21. हल करें : (2013C)

$$\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-7}=\frac{11}{30}.$$

हल : $\frac{(x-7)-(x+4)}{(x+4)(x-7)}=\frac{11}{30}$

$\Rightarrow \frac{x-7-x-4}{x^2-3x-28}=\frac{11}{30}$ $\Rightarrow \frac{-11}{x^2-3x-28}=\frac{11}{30}$

$\Rightarrow \frac{-1}{x^2-3x-28}=\frac{1}{30}$; $x^2-3x-28=-30$

$\Rightarrow x^2-3x-28+30=0$; $x^2-3x+2=0$

$x^2-(2x+x)+2=0$; $x^2-2x-x+2=0$

$x(x-2)-(x-2)=0$; $(x-2)(x-1)=0$

$x-2=0$; $\therefore x=2$

$x-1=0$ $\therefore x=1$

$x=1, 2$ उत्तर।

प्रश्न 22. हल कीजिए : (M. Q., Set–V : 2011)

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}=2 \text{ तथा } \frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}=\frac{13}{6}.$$

हल : $\frac{1}{x}=u$ तथा $\frac{1}{y}=v$ लेने पर समीकरण निकाय बना,

$\frac{1}{2}u+\frac{1}{3}v=2 \Rightarrow 3u+2v=12$ ...(1)

$\frac{1}{3}u+\frac{1}{2}v=\frac{13}{6} \Rightarrow 2u+3v=13$ ...(2)

समीकरण (1) को 3 से व समीकरण (2) को 2 से गुणा करने पर,

$9u+6v=36$ ...(3)

तथा $4u+6v=26$ ...(4)

समीकरण (4) को समीकरण (3) में से घटाने पर,

$5u=10 \Rightarrow u=2$

समीकरण (3) में, $u=2$ रखने पर,

$18+6v=36 \Rightarrow 6v=18 \Rightarrow v=3$

अब, $u=2 \Rightarrow \frac{1}{x}=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

तथा $v=3 \Rightarrow \frac{1}{y}=3 \Rightarrow y=\frac{1}{3}$

अत: $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$; उत्तर।

प्रश्न 23. हल कीजिए : (2014C)

$$\frac{5}{x-1}+\frac{1}{y-2}=2 \text{ तथा } \frac{6}{x-1}-\frac{3}{y-2}=1.$$

हल : माना $u=\frac{1}{x-1}, v=\frac{1}{y-2}$ तब समीकरण निकाय बना,

$5u+v=2$ ...(1)

तथा, $6u-3v=1$ ...(2)

समीकरण (1) को 3 से गुणा करने पर,

$15u+3v=6$ ...(3)

समीकरण (2) तथा (3) का योग करने पर,

$21u=7 \Rightarrow u=\frac{1}{3}$

समीकरण (1) में $u=\frac{1}{3}$ रखने पर,

$\frac{5}{3}+v=2 \Rightarrow v=2-\frac{5}{3}=\frac{6-5}{3}=\frac{1}{3}$

अब, $u=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{x-1}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow x-1=3 \Rightarrow x=4$

तथा $v=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{y-2}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow y-2=3 \Rightarrow y=5$

अत: $x=4, y=5$; उत्तर।

प्रश्न 24. हल कीजिए :

$$\frac{7x-2y}{xy}=5 \text{ तथा } \frac{8x+7y}{xy}=15$$

हल : दिया गया समीकरण निकाय

$\frac{7x-2y}{xy}=5 \Rightarrow \frac{7}{y}-\frac{2}{x}=5$

और $\frac{8x+7y}{xy}=15 \Rightarrow \frac{8}{y}+\frac{7}{x}=15$

$u=\frac{1}{x}, v=\frac{1}{y}$ रखने पर समीकरण,

$7v-2u=5$ ...(1)

तथा, $8v+7u=15$ ...(2)

समीकरण (1) को 7 से व समीकरण (2) को 2 से गुणा करने पर,

$49v-14u=35$ ...(3)

तथा, $16v+14u=30$ ...(4)

समीकरण (3) तथा (4) का योग करने पर,

$65v=65 \Rightarrow v=1$

समीकरण (1) में $v=1$ रखने पर,

$7-2u=5 \Rightarrow -2u=-2 \Rightarrow u=1$

अब, $u=1 \Rightarrow \frac{1}{x}=1 \Rightarrow x=1$

तथा, $v=1 \Rightarrow \frac{1}{y}=1 \Rightarrow y=1$

अत: $x=1, y=1$; उत्तर।

प्रश्न 25. हल कीजिए : (2014A)

$$6x+3y=6xy \text{ तथा } 2x+4y=5xy.$$

हल : प्रदत्त समीकरण निकाय $6x+3y=6xy$ तथा $2x+4y=5xy$

(जहाँ x तथा y शून्य नहीं है।)

चूँकि $x\neq 0, y\neq 0$ तो $xy\neq 0$

दोनों समीकरणों को xy से भाग करने पर,

$\frac{3}{x}+\frac{6}{y}=6$ तथा $\frac{4}{x}+\frac{2}{y}=5$

$\frac{1}{x}=u$ तथा $\frac{1}{y}=v$ लेने पर,

$3u+6v=6$ ...(1)

तथा, $4u+2v=5$ ...(2)

समीकरण (2) को 3 से गुणा करने पर,

$12u+6v=15$ ...(3)

समीकरण (1) को समीकरण (3) में से घटाने पर,

$9u=15-6=9 \Rightarrow u=1$

समीकरण (1) में $u = 1$ रखने पर,

$3 \times 1 + 6v = 6 \quad \Rightarrow 6v = 6 - 3 = 3 \quad \Rightarrow v = \frac{1}{2}$

अब, $u = 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \quad \Rightarrow x = 1$

तथा, $v = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow y = 2$

अतः $x = 1$ व $y = 2$; उत्तर।

प्रश्न 26. हल कीजिए :

$$\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 \text{ तथा } \frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$$

हल : समीकरण निकाय है

$$\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 \qquad \frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$$

$u = \frac{1}{x+y}$ तथा $v = \frac{1}{x-y}$ लेने पर समीकरण,

$10u + 2v = 4 \quad \Rightarrow 5u + v = 2 \quad ...(1)$

तथा, $15u - 5v = -2 \quad ...(2)$

समीकरण (1) में 5 से गुणा करने पर,

$25u + 5v = 10 \quad ...(3)$

समीकरण (2) व समीकरण (3) का योग करने पर,

$40u = 8 \quad \Rightarrow u = \frac{1}{5}$

समीकरण (1) में $u = \frac{1}{5}$ रखने पर,

$5\left(\frac{1}{5}\right) + v = 2 \quad \Rightarrow v = 2 - 1 = 1$

अब, $u = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow x + y = 5 \quad ...(4)$

तथा $v = 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{x-y} = 1$

$\Rightarrow x - y = 1 \quad ...(5)$

समीकरण (4) तथा (5) का योग करने पर,

$2x = 6 \quad \Rightarrow x = 3$

समीकरण (4) में $x = 3$ रखने पर,

$3 + y = 5 \quad \Rightarrow y = 5 - 3 = 2$

अतः $x = 3, y = 2$; उत्तर।

प्रश्न 27. हल करें : (M. Q., Set–II : 2016)

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \text{ और } ax + by = a^2 + b^2.$$

हल : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ और $ax + by = a^2 + b^2$

यहाँ $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = k$ (माना), तो $x = ak, y = bk \quad ...(1)$

दूसरे समीकरण $ax + by = a^2 + b^2$ से,

$a \cdot ak + b \cdot bk = a^2 + b^2$

$\Rightarrow a^2k + b^2k = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow k(a^2 + b^2) = a^2 + b^2$

$\therefore k = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$

$\therefore$ (1) से, $x = a \cdot 1 = a$ और $y = b \cdot 1 = b$

अतः $x = a, y = b$ अभीष्ट हल है। उत्तर।

प्रश्न 28. हल करें : (M. Q., Set–III : 2015)

$$x + y = a - b$$
$$ax - by = a^2 + b^2.$$

हल : $x + y = a - b \quad ...(i)$

$ax - by = a^2 + b^2 \quad ...(ii)$

$ax + ay = a^2 - ab \quad ...(i) \times a$

$ax - by = a^2 + b^2$

$- \quad + \quad - \quad -$

$ay + by = -ab - b^2$

$\Rightarrow y(a + b) = -b(a + b) \quad \therefore y = -b$

y का मान (i) में रखने पर,

$x - b = a - b$

$\therefore x = a \quad \therefore x = a, y = -b$; उत्तर।

प्रश्न 29. हल कीजिए : (2014A)

$$\frac{4}{x} + 3y = 14$$

$$\frac{3}{x} - 4y = 23.$$

हल : समीकरण निकाय

$\frac{4}{x} + 3y = 14 \quad ...(1)$

तथा $\frac{3}{x} - 4y = 23 \quad ...(2)$

समीकरण (1) को 4 से तथा समीकरण (2) को 3 से गुणा करने पर,

$\frac{16}{x} + 12y = 56 \quad ...(3)$

तथा, $\frac{9}{x} - 12y = 69 \quad ...(4)$

समीकरण (3) व (4) का योग करने पर,

$\frac{25}{x} = 125 \quad \Rightarrow x = \frac{25}{125} = \frac{1}{5}$

समीकरण (1) में $x = \frac{1}{5}$ रखने पर,

$4 \times 5 + 3y = 14 \quad \Rightarrow 3y = 14 - 20$

$\Rightarrow 3y = -6 \quad \Rightarrow y = -2$

अतः $x = \frac{1}{5}, y = -2$; उत्तर।

प्रश्न 30. हल करें : (M. Q., Set–II : 2016)

$$9x^4 - 29x^2 + 20 = 0.$$

हल : $9x^4 - (20x^2 + 9x^2) + 20 = 0$

$\Rightarrow 9x^4 - 20x^2 - 9x^2 + 20 = 0$

$\Rightarrow x^2(9x^2 - 20) - (9x^2 - 20) = 0$

$\Rightarrow (x^2 - 1)(9x^2 - 20) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 0$ या, $9x^2 - 20 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 1$ या, $9x^2 = 20$

$\Rightarrow x = \sqrt{1}$ या, $x = \sqrt{\frac{20}{9}}$

$\therefore x = \pm 1$ या, $x = \pm\frac{2\sqrt{5}}{3}$

$\therefore x = \pm 1, \pm\frac{2\sqrt{5}}{3}$. उत्तर।

प्रश्न 31. हल करें : (M. Q., Set–II : 2015)

$$\frac{4}{x}+3y=8 \text{ और } \frac{6}{x}-4y=-5.$$

हल : $\frac{4}{x}+3y=8$ ... (i)

$\frac{6}{x}-4y=-5$ ... (ii)

$\frac{24}{x}+18y=48$ ... (i) × 6

$\frac{24}{x}-16y=-20$ ... (ii) × 4

$- \quad + \quad +$

$34y = 68$

$y = \frac{68}{34}=2$

y का मान समी॰ (1) में रखने पर,

$\frac{4}{x}+3\times2=8 \Rightarrow \frac{4}{x}=8-6$

$\Rightarrow 4=2x \quad \therefore x=2$

$\therefore$ x = 2, y = 2; उत्तर।

प्रश्न 32. समीकरण का हल निकालें : (M. Q., Set–II : 2016)

$$ax+by=a-b$$
$$bx-ay=a+b.$$

हल : $(ax+by=a-b)\times b$

$(bx-ay=a+b)\times a$

$abx+b^2y=ab-b^2$

$abx-a^2y=a^2+ab$

$- \quad + \quad - \quad -$

$y(a^2+b^2)=-(a^2+b^2) \quad \therefore y=-1$

y का मान $ax+by=a-b$ में रखने पर,

$ax-b=a-b \Rightarrow ax=a$

$\Rightarrow x=1$ अत: $x=1, y=-1$ उत्तर।

प्रश्न 33. a और b के किन मानों के लिए, निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे ?

$$2x+3y=7$$
$$(a-b)x+(a+b)y=3a+b-2$$

हल : हमें ज्ञात है कि समीकरण युग्म $a_1x+b_1y=c_1$ तथा $a_2x+b_2y=c_2$ के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे।

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ दिए गए समीकरण युग्म का अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे यदि

$\frac{2}{a-b}=\frac{3}{a+b}=\frac{7}{3a+b-2}$

$\Rightarrow \frac{2}{a-b}=\frac{3}{a+b}$ तथा $\frac{2}{a-b}=\frac{7}{3a+b-2}$

$\Rightarrow 2a+2b=3a-3b$ तथा $6a+2b-4=7a-7b$

$\Rightarrow a=5b$ तथा $a-9b=-4$

समीकरण $a-9b=-4$ में $a=5b$ रखने पर,

$5b-9b=-4 \Rightarrow -4b=-4 \Rightarrow b=1$

$a=5b$ में $b=1$ रखने पर,

$a=5(1)=5$

अत: समीकरण युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल के लिए $a=5$ तथा $b=1$ होंगे। उत्तर।

प्रश्न 34. $2x+3y=11$ एवं $2x-4y=-24$ का हल करें और m का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $y=mx+3$ हो। (2016A)

हल : $2x+3y=11$ ... (1)

$2x-4y=-24$ ... (2)

$- \quad + \quad +$

$7y=35$

$\therefore y=\frac{35}{7}=5$

y का मान समी॰ (1) में रखने पर,

$2x+3y=11 \Rightarrow 2x+3\times5=11$

$\Rightarrow 2x+15=11 \Rightarrow 2x=11-15=-4$

$\therefore x=\frac{-4}{2}=-2.$ $y=mx+3$

$5=m\times-2+3 \Rightarrow 5=-2m+3$

$\Rightarrow 2m=-5+3=-2 \quad \therefore m=\frac{-2}{2}=-1$

$\therefore x=-2, y=5$ तथा $m=-1$ उत्तर।

प्रश्न 35. समीकरण युग्म $3x-5y=4$
$9x-2y=7$ को हल करें। (2016C)

हल : $(3x-5y=4)\times2$

$(9x-2y=7)\times5$

$\Rightarrow 6x-10y=8$

$45x-10y=35$

$- \quad + \quad -$

$-39x = -27$

$\therefore x=\frac{39}{27}=\frac{13}{9}$ $3x-5y=4$

$\Rightarrow 3\times\frac{13}{9}-5y=4 \Rightarrow -5y=4-\frac{13}{3}=\frac{12-13}{3}=\frac{-1}{3}$

$\therefore y=\frac{1}{15}$

$x=\frac{13}{9}$

$y=\frac{1}{15}$ } उत्तर।

प्रश्न 36. प्रतिस्थापन विधि से निम्न रेखीय समीकरण युग्म का हल करें :
$3x-5y=20$ और $x+2y=3$. (2016A)

हल : $3x-5y=20$ ... (i)

$x+2y=3$ ... (ii)

समीकरण (i) से,

$3x-5y=20 \Rightarrow 3x=20+5y$

$\therefore x=\frac{20+5y}{3}$

x का मान समीकरण (ii) में देने पर,

$\frac{20+5y}{3}+2y=3 \Rightarrow \frac{20+5y+6y}{3}=3$

$\Rightarrow \frac{20+11y}{3}=3 \Rightarrow 20+11y=9$

$\Rightarrow 11y=9-20=-11 \quad \therefore y=\frac{-11}{11}=-1$

अब y का मान समीकरण (ii) में देने पर,

$x + 2y = 3 \quad \Rightarrow \quad x + 2 \times -1 = 3$

$\Rightarrow \quad x - 2 = 3 \quad \therefore \quad x = 3 + 2 = 5$ Ans.

प्रश्न 37. हल करें : (M. Q., Set–V : 2016)

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{5} + 1 = 15 \text{ और } \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 15.$$

हल : $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} + 1 = 15$ या, $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 15 - 1 = 14$

$\left(\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 14\right) \times \frac{1}{8}$ $\left(\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 15\right) \times \frac{1}{10}$

$\Rightarrow \frac{x}{80} + \frac{y}{40} = \frac{14}{8}$ $\Rightarrow \frac{x}{80} + \frac{y}{60} = \frac{15}{10}$

$\Rightarrow \frac{x}{80} + \frac{y}{40} = \frac{7}{4}$ $\Rightarrow \frac{x}{80} + \frac{y}{60} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{80} + \frac{y}{40} = \frac{7}{4}\right) - \left(\frac{x}{80} + \frac{y}{60} = \frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{y}{120} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow 4y = 120$

$\therefore \quad y = \frac{120}{4} = 30$

$\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 15$ में y का मान देने पर,

$\frac{x}{8} + \frac{30}{6} = 15 \quad \Rightarrow \frac{x}{8} + 5 = 15$

$\Rightarrow \frac{x}{8} = 15 - 5 = 10 \quad \therefore \quad x = 80$

अत: $x = 80$ तथा $y = 30$; उत्तर।

प्रश्न 38. $2x + 3y = 11$ और $2x - 4y = -24$ को हल कीजिए और इससे 'm' का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $y = mx + 3$ हो।

हल : दिये गये समीकरण हैं

$2x + 3y = 11$ ...(1)

और $2x - 4y = -24$ ...(2)

समीकरण (1) से,

$3y = 11 - 2x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{11 - 2x}{3}$

समीकरण (2) में $y = \frac{11 - 2x}{3}$ रखने पर,

$2x - 4\left(\frac{11 - 2x}{3}\right) = -24$

$\Rightarrow \quad 6x - 44 + 8x = -72 \quad \Rightarrow \quad 14x = -72 + 44$

$\Rightarrow \quad 14x = -28 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-28}{14} = -2$

समीकरण (1) में $x = -2$ रखने पर,

$2(-2) + 3y = 11 \quad \Rightarrow \quad 3y = 11 + 4$

$\Rightarrow \quad 3y = 15 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{15}{3} = 5$

समीकरण $y = mx + 3$ में $x = -2, y = 5$ रखने पर,

$5 = m(-2) + 3 \quad \Rightarrow \quad -2m = 5 - 3$

$\Rightarrow \quad -2m = 2 \quad \Rightarrow \quad m = -1$; उत्तर।

द्विघात समीकरण

प्रश्न 1. द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 6 = 0$ का विविक्तकर ज्ञात कीजिए। (2012C)

हल : यहाँ $a = 2, \quad b = -7, \quad c = 6$

$\therefore \quad D = b^2 - 4ac = 49 - 48 = 1$. उत्तर।

प्रश्न 2. द्विघात समीकरण $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ का विविक्तकर ज्ञात कीजिए। (2013C)

हल : $a = \sqrt{2}$, $b = 7$ तथा $c = 5\sqrt{2}$

$D = b^2 - 4ac = (7)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 49 - 40 = 9$

$\therefore \quad D = 9$. उत्तर।

प्रश्न 3. द्विघात समीकरण $4x^2 - 5x + 3 = 0$ का विविक्तकर ज्ञात कीजिए और फिर मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। (2014A)

हल : विविक्तकर $(D) = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 4 \times 3$

$= 25 - 48 = -23 < 0.$

$\therefore \quad$ मूल वास्तविक नहीं है। उत्तर।

प्रश्न 4. समीकरण $5x^2 = 4x - 2$ का विवेचक ज्ञात करें। (M. Q., Set–II : 2011)

अथवा, **द्विघात समीकरण $5x^2 - 4x + 2 = 0$ का विवेचक ज्ञात करें।** (2012A, M. Q., Set–III : 2016)

हल : $5x^2 = 4x - 2$ या, $5x^2 - 4x + 2 = 0$

विवेचक $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 5 \times 2 = 16 - 40 = -24$. उत्तर।

प्रश्न 5. द्विघात समीकरण $2x^2 - 5x + 3$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल : $2x^2 - 5x + 3 = 0$ $\quad D = b^2 - 4ac$

$a = 2, b = -5, c = 3$ $\quad = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1$

$1 > 0$ अत: मूल वास्तविक तथा भिन्न हैं। उत्तर।

प्रश्न 6. समीकरण $2x^2 - 3x + 5 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। यदि मूलों का अस्तित्व हो, तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

हल : द्विघात समीकरण है : $2x^2 - 3x + 5 = 0$

इसकी तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 2, b = -3, c = 5$

$\therefore \quad D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31 < 0$

अत: द्विघात समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं है; उत्तर।

प्रश्न 7. $2x^2 - 3x + 4$ के मूलों की प्रकृति निकालें। (M. Q., Set–III : 2016)

हल : $a = 2, b = -3$ तथा $c = 4$

$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 9 - 32 = -23 < 0$. उत्तर।

अत: प्रदत्त समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं है।

प्रश्न 8. $2x^2 + 3x + 4$ के मूलों के प्रकृति ज्ञात करें। (M. Q., Set–III : 2016)

हल: $a = 2, b = 3$ तथा $c = 4$

$D = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 9 - 32 = -23 < 0$ उत्तर।

अत: प्रदत्त समीकरण का कोई मूल वास्तविक नहीं है।

प्रश्न 9. समीकरण $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। (M. Q., Set–III : 2015)

हल : दिया गया द्विघात समीकरण है : $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

इसकी तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 3, b = -4\sqrt{3}, c = 4$

$\therefore \quad D = b^2 - 4ac = \left(-4\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 3 \times 4 = 48 - 48 = 0$

अत: समीकरण के वास्तविक और बराबर मूल हैं; उत्तर।

प्रश्न 10. समीकरण $2x^2-6x+3=0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।
(M. Q., Set-I : 2011, MQ 2017)

हल : दिया गया द्विघात समीकरण है $2x^2-6x+3=0$
इसकी तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,
$a=2, \quad b=-6, \quad c=3$
$\therefore \quad D=b^2-4ac=(-6)^2-4\times2\times3=36-24=12>0$
$\therefore$ इस द्विघात समीकरण के वास्तविक और भिन्न मूल हैं; उत्तर।

प्रश्न 11. बहुपद $4x^2-9$ का शून्यक ज्ञात करें। (2016C)

हल : $4x^2-9=0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2=9$

$\therefore \quad x=\sqrt{\frac{9}{4}}=\pm\frac{3}{2}$. उत्तर।

प्रश्न 12. द्विघात बहुपद का शून्यक ज्ञात कीजिए। दिया गया बहुपद x^2-2x-8 है।
(M. Q., Set-V : 2011)

हल : $x^2-2x-8=x^2-4x+2x-8=(x-4)(x+2)$
$\therefore$ शून्यक $x=4, x=-2$ उत्तर।

प्रश्न 13. बहुपद x^2-3 का शून्यक निकालें। (M. Q., Set-I : 2016)

हल : $x^2-3=0$

$x^2=3 \quad \therefore \quad x=\sqrt{3}=\pm\sqrt{3}$ उत्तर।

प्रश्न 14. यदि $4x^2-25=0$; तो x का मान लिखिए।
(M. Q., Set-III : 2011)

हल : $4x^2-25=0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2=25$

$\Rightarrow \quad x^2=\frac{25}{4}=\left(\frac{5}{2}\right) \quad \therefore \quad x=\pm\frac{5}{2}$ उत्तर।

प्रश्न 15. $a^2p^2x^2-q^2=0$ के मूलों को लिखें।
(M. Q., Set-IV : 2015)

हल : $a^2p^2x^2-q^2=0;$
$a^2p^2x^2=q^2$

$\therefore \quad x^2=\frac{q^2}{a^2p^2} \quad \therefore \quad x=\pm\frac{q}{ap}$ उत्तर।

प्रश्न 16. द्विघात समीकरण $-3x^2+4x+5=0$ के मूलों का योगफल कितना होगा? (2013A)

हल : $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$.

प्रश्न 17. द्विघात बहुपद ज्ञात करें जिनके शून्यक $\sqrt{3}+1$ एवं $\sqrt{3}-1$ हैं।
(M. Q., Set-I : 2015)

हल : $a+b=\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1=2\sqrt{3}$
$ab=(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=(\sqrt{3})^2-(1)^2=3-1=2$
$\therefore$ द्विघात बहुपद : $x^2-(a+b)x+ab=x^2-2\sqrt{3}x+2$ उत्तर।

प्रश्न 18. किसी द्विघात बहुपद का शून्यक -2 और -5 है तो बहुपद ज्ञात करें।
(M. Q., Set-III : 2015)

हल : $\alpha=-2, \quad \beta=-5$
$\therefore$ द्विघात बहुपद $=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$
$=x^2-(-2-5)x+(-2\times-5)$
$=x^2+7x+10$. उत्तर।

प्रश्न 19. दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 306 है इसे द्विघात समीकरण के रूप में लिखें। (M. Q., Set-II : 2015)

हल : माना कि दो क्रमागत संख्या x और $x+1$ है।
प्रश्नानुसार,
$x(x+1)=306 \quad \Rightarrow \quad x^2+x-306=0;$ उत्तर।

प्रश्न 20. द्विघात समीकरण $x^2-3x-10=0$ का मूल ज्ञात कीजिए।
(M. Q., Set-V : 2015)

हल : $x^2-3x-10=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-5x+2x-10=0$
$\Rightarrow \quad x(x-5)+2(x-5)=0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)(x-5)=0$
$\therefore \quad x=5, -2.$ उत्तर।

प्रश्न 21. यदि द्विघात समीकरण के मूल $\sqrt{5}$ और $-\sqrt{5}$ हों तो उस समीकरण को लिखें। (M. Q., Set-III : 2011)

हल : द्विघात समीकरण :
$\Rightarrow \quad (x-\sqrt{5})(x-(-\sqrt{5})=0$
$\Rightarrow \quad x^2-5=0.$ उत्तर।

प्रश्न 22. एक द्विघातीय बहुपद समीकरण ज्ञात करें, जिसके शून्यकों के योग एवं गुणनफल क्रमशः 4 एवं 1 हैं। (2016A)

हल : $\alpha+\beta=4; \quad \alpha.\beta=1$
$\therefore$ द्विघात बहुपद समीकरण $=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha.\beta=0$
$x^2-4x+1=0.$ उत्तर।

प्रश्न 23. द्विघात बहुपद ज्ञात करें, जिनके शून्यकों का योग और गुणनफल क्रमशः -3 और 2 हैं। (2015A)

हल : $\alpha+\beta=-3, \quad \alpha\beta=2$
$\therefore$ द्विघात बहुपद $=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$
$=x^2-(-3)x+2=x^2-3x+2.$ उत्तर।

प्रश्न 24. द्विघात समीकरण $\sqrt{2}x^2-6x+2\sqrt{2}=0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात करें। (2014A)

हल : $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-6)}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

$\alpha.\beta=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2.$ उत्तर।

प्रश्न 25. द्विघात समीकरण $\sqrt{3}x^2+8x+4\sqrt{3}=0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात करें। (2014A)

हल : $\sqrt{3}x^2+8x+4\sqrt{3}=0$

मूलों का योगफल $(\alpha+\beta)=\frac{-b}{a}=\frac{-8}{\sqrt{3}}$

मूलों का गुणनफल $=\frac{c}{a}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=4 \quad \therefore \quad \frac{-8}{\sqrt{3}}, 4.$ उत्तर।

प्रश्न 26. द्विघात समीकरण $\sqrt{5}x^2-10x-\sqrt{5}=0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात करें। (2014C)

हल : $\sqrt{5}x^2-10x-\sqrt{5}=0$

मूलों का योगफल $=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}=\frac{-(-10)}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$ उत्तर।

प्रश्न 27. उस द्विघात बहुपद को निकालें जिनके शून्यकों का योगफल और गुणनफल क्रमशः शून्य और $\sqrt{5}$ है। (M. Q., Set-IV; 2016)

हल : $\alpha+\beta=0$
$\alpha\cdot\beta=\sqrt{5}$
द्विघात बहुपद $=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha.\beta$
$=x^2-0.x+\sqrt{5}=x^2+\sqrt{5}$ उत्तर।

प्रश्न 28. एक द्विघात बहुपद ज्ञात करें, जिसके शून्यकों का योग 1 तथा गुणनफल 1 हो। (M. Q., Set–V : 2015)

हल : $x^2-(a+b)x+ab=0$

$\Rightarrow x^2-(1)x+1=0 \quad \Rightarrow x^2-x+1=0$. उत्तर।

प्रश्न 29. बहुपद के मूलों का योग और गुणनफल $\frac{1}{4},\frac{1}{4}$ है तो बहुपद; निकालें। (M. Q., Set–IV : 2015, M. Q., Set–II : 2016)

हल : $\alpha+\beta=\frac{1}{4},\ \alpha\beta=\frac{1}{4}$

$\therefore$ समीकरण $=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

$\Rightarrow x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}=0$ उत्तर।

प्रश्न 30. यदि α और β द्विघात बहुपद $f(x)=ax^2+bx+c$ के शून्यक हो; तो $\alpha^2+\beta^2$ का मान निकालें। (M. Q., Set–I : 2015)

हल : $f(x)=ax^2+bx+c,\ \alpha^2+\beta^2=?$

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a};\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=\left(\frac{-b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ca}{a^2}$$ उत्तर।

प्रश्न 31. यदि $4x^2-25=0$, तो x का मान निकालें। (2015A)

हल : $4x^2-25=0$

$4x^2=25$

$$\Rightarrow x^2=\frac{25}{4} \qquad \therefore\ x=\sqrt{\frac{25}{4}}=\pm\frac{5}{2}$$ उत्तर।

प्रश्न 32. मूलों की प्रकृति बताइए यदि द्विघात समीकरण $2x^2-6x+3=0$ हो। (2015A)

हल : द्विघात समीकरण है $2x^2-6x+3=0$

इसकी तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$a=2, b=-6, c=3$

$\therefore\ D=b^2-4ac=(-6)^2-4\times2\times3=36-24=12>0$. उत्तर।

प्रश्न 33. यदि α और β द्विघात बहुपद ax^2+bx+c के शून्यक हो तो $\alpha^2+\beta^2$ का मान ज्ञात करें। (M. Q., Set–IV: 2016)

हल : $\alpha+\beta=\frac{-b}{a};\qquad \alpha.\beta=\frac{c}{a}$

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha.\beta$

$$\left(\frac{-b}{a}\right)^2=(\alpha^2+\beta^2)+\frac{2c}{a}$$

$$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ca}{a^2}$$ उत्तर।

प्रश्न 34. गुणनखण्ड विधि से द्विघात समीकरण $x^2-3x-10=0$ के मूल ज्ञात कीजिए। (2016A)

हल : $x^2-3x-10=0 \quad \Rightarrow x^2-(5x-2x)-10=0$

$\Rightarrow x^2-5x+2x-10=0 \quad \Rightarrow x(x-5)+2(x-5)=0$

$\Rightarrow (x-5)(x+2)=0$

$\because\ x-5=0 \qquad$ या $\quad x+2=0$

$\therefore\ x=5 \qquad$ या $\quad x=-2$

$x=5,-2$. उत्तर।

प्रश्न 35. बहुपद $4x^2-3$ के शून्यक ज्ञात करें। (2016A)

हल : $\because\ 4x^2-3=0 \quad \Rightarrow 4x^2=3$

$$\Rightarrow x^2=\frac{3}{4} \qquad \therefore\ x=\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$ उत्तर।

प्रश्न 36. p का मान ज्ञात करें यदि समीकरण $px(x-2)+6=0$ के मूल बराबर हैं। (2011C)

हल : समीकरण $px(x-2)+6=0$

$\Rightarrow px^2-2px+6=0$

यहाँ, $a=p,\ b=-2p,\ c=6$

मूल बराबर होने के लिए, $D=0$

$\therefore\ b^2-4ac=0 \quad \Rightarrow (-2p)^2-4\times p\times6=0$

$\Rightarrow 4p^2-24p=0 \quad \Rightarrow 4p(p-6)=0$

$4p=0, p-6=0; \qquad p=0$ या $p=6$

$\therefore\ p=6$. उत्तर।

प्रश्न 37. p का मान निकालें, यदि दिए हुए समीकरण का मूल समान है $3x^2-5x+p=0$. (M. Q., Set–IV : 2015, M. Q., Set–IV : 2016)

हल $D=b^2-4ac; \quad \Rightarrow 0=(-5)^2-4\times3\times p$

$0=25-12p \quad \Rightarrow 25=12p$

$$\therefore\ p=\frac{25}{12}$$ उत्तर।

प्रश्न 38. k के किस मान के लिए समीकरण $kx^2+4x+1=0$ के मूल वास्तविक और समान हैं। (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : मूल वास्तविक और समान होंगे

यदि विविक्तकर $D=b^2-4ac=0$

$\Rightarrow 4^2-4\times k\times1=0; \quad \Rightarrow 16-4k=0$

$\therefore\ k=4$. उत्तर।

प्रश्न 39. यदि α, β बहुपद $p(x)=x^2-7x+k$ के शून्यक हैं और $\alpha-\beta=1$ है, तो k का मान निकालें। (2015A)

हल : $p(x)=x^2-7x+k$

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=-(-7)=7;\quad \alpha-\beta=1$$

$\alpha+\beta=7 \qquad 2\alpha=8$

$$\therefore\ \alpha=\frac{8}{2}=4 \qquad \alpha+\beta=7$$

$\Rightarrow 4+\beta=7 \qquad \therefore\ \beta=7-4=3$

$k=\alpha.\beta=4.3=12$. उत्तर।

प्रश्न 40. द्विघात बहुपद $x^2+7x+10$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए। (2016A)

हल : $x^2+7x+10=x^2+(5x+2x)+10=x^2+5x+2x+10$

$=x(x+5)+2(x+5)=(x+5)(x+2)$

$\therefore\ P(x)=x^2+7x+10$ का मान शून्य है जब

$(x+5)=0 \qquad$ या, $\quad (x+2)=0$

अर्थात् $x=-5 \qquad$ या, $\quad x=-2$

अतः $P(x)=x^2+7x+10$ के शून्यक -5 और -2

शून्यकों का योग $=-5+(-2)=-7=\frac{-(7)}{1}=\frac{-(x\text{ का गुणांक})}{x^2\text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $=-5\times-2=\frac{10}{1}=\frac{\text{अचर पद}}{x^2\text{ का गुणांक}}$ Proved.

प्रश्न 41. द्विघात बहुपद ज्ञात करें जिनके शून्यकों का योग 4 तथा गुणनफल 3 है। (2017A)

हल : $\alpha+\beta=4$; $\alpha.\beta=3$

द्विघात समीकरण सूत्र से,

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha.\beta=0$

$x^2-4x+3=0$. उत्तर।

प्रश्न 42. द्विघात बहुपद $2x^2-8x+6$ के शून्यकों का योग एवं गुणनफल ज्ञात करें। (2017A)

हल : मूलों का योगफल $(\alpha+\beta)=\frac{-b}{a}=\frac{-(-8)}{2}=\frac{8}{2}=4.$

मूलों का गुणनफल $(\alpha.\beta)=\frac{c}{a}=\frac{6}{2}=3.$ उत्तर।

प्रश्न 43. द्विघात समीकरण के मूलों के वास्तविक एवं समान होने के लिए शर्तों को लिखें। (2017A)

हल : $D=b^2-4ac=0$. उत्तर।

प्रश्न 44. द्विघात समीकरण $2x^2+kx+3=0$ में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो बराबर मूल हों। (M. Q., Set–V : 2015, 2015A. M. Q., Set–III : 2016)

हल : द्विघात समीकरण है : $2x^2+kx+3=0$

इसकी तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$a=2, b=k, c=3$

∵ द्विघात समीकरण के मूल बराबर हैं।

∴ $D=0$

$b^2-4ac=0$

या, $(k)^2-4\times2\times3=0$ या, $k^2-24=0$

या, $k^2=\pm\sqrt{24}$ या, $k=\pm2\sqrt{6}$;उत्तर।

प्रश्न 45. द्विघात समीकरण $kx(x-2)+6=0$ में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो बराबर मूल हों।

हल : द्विघात समीकरण है :

$kx(x-2)+6=0$ या, $kx^2-2kx+6=0$

इसकी तुलना $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$a=k, b=-2k, c=6$

∵ द्विघात समीकरण के मूल बराबर हैं।

∴ $D=0$

$b^2-4ac=0$

या, $(-2k)^2-4\times k\times6=0$ या, $4k^2-24k=0$

या, $4k[k-6]=0$ अर्थात् $4k=0$

या, $k-6=0$ $k=0$

या, $k=6$ ∴ $k=0, 6$;उत्तर।

प्रश्न 46. द्विघात समीकरण $2x^2-x+\frac{1}{8}=0$ का गुणनखंड विधि से मूल ज्ञात कीजिए।

हल : द्विघात समीकरण है $2x^2-x+\frac{1}{8}=0$

या, $\frac{16x^2-8x+1}{8}=0$

या, $16x^2-8x+1=0$ $S=-8$

या, $16x^2-4x-4x+1=0$ $P=16\times1=16$

या, $4x(4x-1)-1(4x-1)=0$

या, $(4x-1)(4x-1)=0$ अर्थात् $4x-1=0$

या, $4x-1=0$ या, $x=\frac{1}{4}$

या, $x=\frac{1}{4}$

अतः $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{4}$ समीकरण के मूल हैं; उत्तर।

प्रश्न 47. द्विघात समीकरण $x^2-3x-10=0$ का गुणनखंड विधि से मूल ज्ञात कीजिए।

हल : द्विघात समीकरण है

$x^2-3x-10=0$ $S=-3$

या, $x^2-5x+2x-10=0$ $P=-10$

या, $x(x-5)+2(x-5)=0$

या, $(x-5)(x+2)=0$

अर्थात् $x-5=0$ या, $x+2=0$

$x=5$ या, $x=-2$

अतः, 5 और -2 दी गई द्विघात समीकरण के मूल हैं; उत्तर।

प्रश्न 48. द्विघात समीकरण $2x^2+x-6=0$ का गुणनखंड विधि से मूल ज्ञात कीजिए।

हल : द्विघात समीकरण है

$2x^2+x-6=0$ $S=1$

या, $2x^2+4x-3x-6=0$ $P=-6\times2=-12$

या, $2x(x+2)-3(x+2)=0$

या, $(x+2)(2x-3)=0$

अर्थात् $x+2=0$ या, $2x-3=0$

$x=-2$ या, $x=\frac{3}{2}$

अर्थात् -2 और $\frac{3}{2}$ द्विघात समीकरण के मूल हैं; उत्तर।

प्रश्न 49. द्विघात समीकरण $\sqrt{2}x^2+7x+5\sqrt{2}=0$ का गुणनखंड विधि से मूल ज्ञात कीजिए।

हल : समीकरण है,

$\sqrt{2}x^2+7x+5\sqrt{2}=0$ $S=7$

या, $\sqrt{2}x^2+2x+5x+5\sqrt{2}=0$ $P=\sqrt{2}\times5\sqrt{2}=10$

या, $\sqrt{2}x(x+\sqrt{2})+5(x+\sqrt{2})=0$

या, $(x+\sqrt{2})(\sqrt{2}x+5)=0$

अर्थात् $x+\sqrt{2}=0$ या, $\sqrt{2}x+5=0$

$x=-\sqrt{2}$ या, $x=\frac{-5}{\sqrt{2}}$

अतः, $-\sqrt{2}$ और $\frac{-\sqrt{5}}{2}$ द्विघात समीकरण के मूल हैं; उत्तर।

प्रश्न 50. द्विघात समीकरण का मूल निकालें :

$2x^2-2\sqrt{2}x+1=0.$

(M. Q., Set–II : 2015, 2015A)

हल : $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

$D=(-2\sqrt{2})^2-4.2.1=8-8=0$

∴ मूल $=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{(-)-2\sqrt{2}\pm\sqrt{D}}{2.2}=\frac{2\sqrt{2}}{2.2}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$;उत्तर।

प्रश्न 51. k के किस मान के लिए समी० $(k-12)x^2+2(k-12)x+2=0$ मूल वास्तविक और समान होंगे। (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : मूल वास्तविक और समान होंगे यदि

$b^2-4ac=0$

$\Rightarrow 2(k-12)]^2-4(k-12)\times2=0$

$\Rightarrow 4(k-12)^2-8(k-12)=0$

$\Rightarrow (k-12)[k-12-2]=0$

$\Rightarrow (k-12)(k-14)=0$

∴ $k=12, k=14$

$\Rightarrow k=14$. उत्तर। [$k=12$ उचित नहीं है]

प्रश्न 52. द्विघात समीकरण $2x^2 + x - 4 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। यदि मूलों का अस्तित्व हो, तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

अथवा, द्विघात समीकरण को पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से हल करें—

$2x^2 + x - 4 = 0$. **(M. Q., Set–V : 2011)**

हल : $2x^2 + x - 4 = 0$

$a = 2, \quad b = 1, \quad c = -4,$

$D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-4)$

$= 1 + 32 = 33 > 0$, वास्तविक मूल

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2 \times 2} \quad \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{33}}{4};$$ उत्तर।

प्रश्न 53. गुणनखंड द्वारा समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ का मूल ज्ञात कीजिए। **(2011A)**

हल : $2x^2 - 5x + 3 = 0$

या, $2x^2 - (2x + 3x) + 3 = 0$

या, $2x^2 - 2x - 3x + 3 = 0$

या, $2x(x - 1) - 3(x - 1) = 0$

या, $(2x - 3)(x - 1) = 0$

$\therefore \quad 2x - 3 = 0$ या $x - 1 = 0$

$\therefore \quad x = \frac{3}{2}$ या 1, अतः मूल है $\frac{3}{2}, 1$ उत्तर।

प्रश्न 54. द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 4 = 0$ का विविक्तकर ज्ञात कीजिए और फिर मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। **(2014C)**

हल : $2x^2 - 3x + 4 = 0$

$a = 2, \quad b = -3, \quad c = 4$

$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 9 - 32 = -23$

$D < 0$, कोई वास्तविक मूल नहीं है। उत्तर।

प्रश्न 55. द्विघात समीकरण $5x^2 - 8x + 3 = 0$ का विविक्तकर ज्ञात कीजिए और फिर मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। **(2014A)**

हल : विविक्तकर $(D) = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 5 \times 3$

$= 64 - 60 = 4 > 0.$

$\therefore \quad$ मूल वास्तविक एवं असमान है। उत्तर।

प्रश्न 56. हल करें : $\sqrt{13 - x^2} = x + 5$. **(2015A)**

हल : $\sqrt{13 - x^2} = x + 5$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$(\sqrt{13 - x^2})^2 = (x + 5)^2$

$\Rightarrow \quad 13 - x^2 = x^2 + 10x + 25$

$\Rightarrow \quad x^2 + 10x + 25 + x^2 - 13 = 0$

$\Rightarrow \quad 2x^2 + 10x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(x^2 + 5x + 6) = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + (3x + 2x) + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 3x + 2x + 6 = 0$

$\Rightarrow \quad x(x + 3) + 2(x + 3) = 0 \Rightarrow \quad (x + 3)(x + 2) = 0$

$\therefore \quad x = -3, x = -2$

अतः $x = -2, -3$ उत्तर।

प्रश्न 57. द्विघात समीकरण $9a^2b^2x^2 - 48\,abcdx + 64c^2d^2 = 0$ मूल निकालें। **(M. Q., Set–V : 2016)**

हल: $(3\,abx)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8\,abc\,dx + (8\,cd)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (3\,abx - 8\,cd)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\,abx - 8\,cd = 0$

$\Rightarrow \quad 3\,abx = 8\,cd \quad \therefore \quad x = \frac{8\,cd}{3\,ab}$ उत्तर।

प्रश्न 58. द्विघात समीकरण $x^2 + 7x + 10 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए। **(2016A)**

हल : $x^2 + 7x + 10 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + (5x + 2x) + 10 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + 5x + 2x + 10 = 0$

$\Rightarrow \quad x(x + 5) + 2(x + 5) = 0$

$\Rightarrow \quad (x + 5)(x + 2) = 0$

$x + 5 = 0$ या, $x + 2 = 0$

$\therefore \quad x = -5$ या, $x = -2$

$x = -5, -2.$ उत्तर।

प्रश्न 59. द्विघात समीकरण $2x^2 - 6x + 3 = 0$ के मूलों की प्रकृति कीजिए। यदि मूलों का अस्तित्व हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया द्विघात समीकरण है $2x^2 - 6x + 3 = 0$

इसकी तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 2, b = -6, c = 3$

$\therefore \quad D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 36 - 24 = 12 > 0$

$\therefore \quad$ द्विघात समीकरण के वास्तविक और भिन्न मूल हैं।

अब, $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{12}}{2 \times 2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{2[3 \pm \sqrt{3}]}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ और $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$

अतः द्विघात समीकरण के मूल $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ और $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ हैं; उत्तर।

प्रश्न 60. दिखाएँ कि $9x^2 - 7x - 2 = 0$ के मूल वास्तविक हैं मूलों को ज्ञात करें। **(201**

हल : $9x^2 + 7x - 2 = 0$

$a = 9, \quad b = 7$ तथा $c = -2$

$D^2 = b^2 - 4ac = (7)^2 - 4 \times 9 \times -2 = 49 + 72 = 121 > 0$

$\therefore \quad$ द्विघात समीकरण के वास्तविक और भिन्न मूल है।

$9x^2 + 7x - 2 = 0 \qquad 9x^2 + (9x - 2x) - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad 9x^2 + 9x - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \quad 9x(x + 1) - 2(x + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad (9x + 2)(x - 2) = 0$

$9x + 2 = 0$ या, $x - 2 = 0$

$\therefore \quad x = \frac{-2}{9}$ या, $x = 2$

$\therefore \quad x = 2$ तथा $\frac{-2}{9}$. उत्तर।

प्रश्न 61. द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 3 = 0$ के मूल, द्विघाती सू उपयोग करके, ज्ञात कीजिए। **(201**

हल : दी गई द्विघात समीकरण है : $2x^2 - 7x + 3 = 0$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

$a = 2, \quad b = -7, \quad c = 3$

अब, $b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 49 - 24 = 25 > 0$

$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{7 \pm 5}{4}$

$= \frac{7 + 5}{4}$ और $\frac{7 - 5}{4} = \frac{12}{4}$ और $\frac{2}{4} = 3$ और $\frac{1}{2}$

अतः, 3 और ½ द्विघात समीकरण के मूल हैं; उत्तर।

प्रश्न 62. $13 - x^2 = (x + 5)^2$ को हल करें। (2017A)

हल : $13 - x^2 = (x + 5)^2$

$\Rightarrow 13 - x^2 = x^2 + 10x + 25$

$\Rightarrow x^2 + 10x + 25 + x^2 - 13 = 0.$

$\Rightarrow 2x^2 + 10x + 12 = 0 \Rightarrow 2(x^2 + 5x + 6) = 0$

$\Rightarrow x^2 + (3x + 2x) + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 2x + 6 = 0$

$\Rightarrow x(x + 3) + 2(x + 3) = 0 \Rightarrow (x + 3)(x + 2) = 0$

$\therefore x = -3, x = -2$ या, $x = -2, -3$ उत्तर।

प्रश्न 63. समीकरण $x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई समीकरण है,

$$x - \frac{1}{x} = 3 \quad \text{या,} \quad \frac{x^2 - 1}{x} = 3$$

या, $x^2 - 1 = 3x$

या, $x^2 - 3x - 1 = 0$

इसकी तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 1, \quad b = -3, \quad c = -1$

अब, $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.1.(-1) = 9 + 4 = 13 > 0$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{13}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{13}}{2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \text{ और } \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

अतः, $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ और $\frac{3 - \sqrt{13}}{2}$ द्विघात समीकरण के मूल हैं; उत्तर।

प्रश्न 64. द्विघात सूत्र से द्विघात समीकरण $2x^2 + x - 528 = 0$ को हल कीजिए। (2011A)

हल : द्विघात समीकरण है $2x^2 + x - 528 = 0$

इसकी तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$a = 2, \quad b = 1$ तथा $c = -528$

$D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times -528 = 1 + 4224 = 4225 > 0$

$\therefore$ द्विघात समीकरण के वास्तविक और भिन्न मूल हैं।

अब $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{2 \times 2}$

$$= \frac{-1 \pm 65}{4} = \frac{-1 + 65}{4} \text{ या } \frac{-1 - 65}{4}$$

$$\therefore x = \frac{64}{4} \text{ और } \frac{-66}{4}$$

$\therefore x = 16$ और $\frac{-33}{2}$ उत्तर।

प्रश्न 65. द्विघात समीकरण को पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से हल करें— $2x^2 + x - 4 = 0$. (M. Q., Set-V : 2011)

हल : $2x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{x}{2} - \frac{4}{2} = 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2 \times \frac{1}{4}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} - 2 = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{33}{16} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right) = \pm\sqrt{\frac{33}{16}} = \pm\frac{\sqrt{33}}{4}$

$$\therefore x = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$$ उत्तर।

प्रश्न 66. द्विघात समीकरण $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ के मूल ज्ञात करें। (2016A)

हल : $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

$D = (-2\sqrt{2})^2 - 4.1.1 = 8 - 4 = 4$

$$\therefore \text{मूल} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{D}}{2.1} = \frac{-2\sqrt{2} \pm 2}{2.1}$$

$$= \frac{2(-\sqrt{2} \pm 2)}{2} = -\sqrt{2} \pm 1 = (-\sqrt{2} + 1), (-\sqrt{2} - 1)$$

समांतर श्रेढ़ियाँ

प्रश्न 1. दिए गए A.P. 12, 17, 22, 27, ... का पहला पद एवं सार्व अन्तर ज्ञात करें। (2014A)

हल : पहला पद (a) = 12

सार्वअन्तर (d) = दूसरा पद − पहला पद = 17 − 12 = 5.

प्रश्न 2. दिए गए A.P. 3, 13, 23, ... का प्रथम पद एवं सार्व अन्तर ज्ञात करें। (2014A)

हल : प्रथम पद (a) = 3

सार्वअन्तर (d) = दूसरा पद − पहला पद = 13 − 3 = 10 उत्तर।

प्रश्न 3. दिए गये A.P. 0, 7, 14, 21, ... का पहला पद एवं सार्व अन्तर ज्ञात करें। (2014A)

हल : पहला पद = 0

सार्व अन्तर = दूसरा पद − पहला पद = 7 − 0 = 7 उत्तर।

प्रश्न 4. 10, 7, 4 ..... 62 ठीक पहले का पद लिखें। (M. Q., Set-II : 2016)

हल : a = 10, d = 7 − 10 = −3

62 के ठीक पहले का पद = −62 − (−3) = −62 + 3 = −59 उत्तर।

प्रश्न 5. समानांतर श्रेणी 1, 4, 7, 10, ... के 18 वें पद का मान ज्ञात करें। (2012A, 2012C, M. Q., Set-I & III : 2015, M. Q., Set-III & IV : 2016)

हल : a = 1, n = 18 तथा d = 4 − 1 = 3

$t_{18} = a + (n - 1)d = 1 + (18 - 1) \times 3$

$= 1 + 17 \times 3 = 1 + 51 = 52$ उत्तर।

प्रश्न 6. समांतर श्रेणी में $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots\ldots$ के लिए प्रथम पद a तथा सार्व अंतर d लिखिए। (2011A)

हल : $a = \frac{3}{2}, d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$; उत्तर।

प्रश्न 7. समांतर श्रेणी (A.P.) −50, −15, 10, 35..... का 10वाँ पद ज्ञात करें। (M. Q., Set-II : 2014)

हल : $a = -50, \ d = -15 - (-50) = 35$

दसवाँ पद $= a_{10} = a + (10 - 1)d = -50 + 9 \times 35$

$= -50 + 315 = 265$; उत्तर।

प्रश्न 8. A.P. 10, 7, 4 का 30वाँ पद निकालें। (2015A)

हल : माना कि A.P का पहला पद a तथा सार्व अंतर d है।

a = 10, d = 7 − 10 = −3

$t_n = a + (n - 1)d$

$t_{30} = 10 + (30 - 1) \times -3 = 10 + 29 \times -3$

$= 10 - 87 = -77.$ उत्तर।

ALWAYS READ BBD® BOOKS

प्रश्न 9. $1 + 3 + 3 + \ldots\ldots\ldots$ का योग n पदों तक निकालें।

(M. Q., Set–IV : 2015)

हल : माना कि $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}(a+1) = \frac{n}{2}(n+1)$ उत्तर।

प्रश्न 10. A.P. : 7, 13, 19, ... 205 में कितने पद हैं ?

हल : स्पष्टतः यह A.P. बनाता है जिसका पहला पद $a = 7$
और सार्व अंतर $d = 13 - 7 = 6$
माना कि श्रेढ़ी में n पद हैं तथा nवाँ पद $= 205$ है।

$\Rightarrow \quad a + (n-1)d = 205 \quad \Rightarrow \quad 7 + (n-1)6 = 205$

$\Rightarrow \quad (n-1)6 = 205 - 7 \quad \Rightarrow \quad 6(n-1) = 198$

$\Rightarrow \quad n - 1 = \frac{198}{6} = 33 \quad \Rightarrow \quad n = 33 + 1 = 34$

अतः दी गई सूची में 34 पद हैं; उत्तर।

प्रश्न 11. 2, 7, 12, ... 10 पदों का समांतर श्रेढ़ी में योग ज्ञात कीजिए।

(M. Q., Set–I : 2011)

हल : माना कि A.P. का पहला पद a तथा सार्व अंतर d है।
$a = 2$ और $d = 7 - 2 = 5$
हमें A.P. के 10 पदों का योग ज्ञात करना है।

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$, में $a = 2, d = 5, n = 10$ रखने पर,

$S_{10} = \frac{10}{2}[2 \times 2 + (10-1)5] = 5(4 + 9 \times 5)$

$= 5(4 + 45) = 5 \times 49 = 245$; उत्तर।

प्रश्न 12. A. P. 21, 18, 15, ... का कौन-सा पद – 81 है ? (2016A)

हल : दिए गए A.P में $a = 21$ तथा $d = 18 - 21 = -3$
माना A.P का nवाँ पद –81 है।

$\therefore \quad a_n = a + (n-1)d \quad$ यानी $-81 = 21 + (n-1)(-3)$

$\Rightarrow \quad -3(n-1) = -81 - 21 = -102$

$\Rightarrow \quad n - 1 = \frac{-102}{-3} = 34$

$\therefore \quad n = 34 + 1 = 35$

A.P. का 35वाँ पद –81 है; उत्तर।

प्रश्न 13. –37, –33, –29 .... 12 पदों का समांतर श्रेढ़ी में योग ज्ञात कीजिए।

हल : माना A.P. का पहला पद a तथा सार्व अंतर d है तो
$a = -37, d = -33 - (-37) = -33 + 37 = 4$
हमें A.P. के 12 पदों का योग ज्ञात करना है।

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ में $a = -37, d = 4, n = 12$ रखने पर,

$S_{12} = \frac{12}{2}[2 \times -37 + (12-1)4] = 6(-74 + 11 \times 4)$

$= 6(-74 + 44) = 6 \times (-30) = -180$; उत्तर।

प्रश्न 14. A.P. 9, 13, 17, 21 ..... का 20 वां पद ज्ञात करें। (2017A)

हल : $a = 9; \qquad d = 4$

$t_{20} = a + (n-1)d = 9 + (20-1) \times 4$

$= 9 + 19 \times 4 = 9 + 76 = 85.$ उत्तर।

प्रश्न 15. A. P. के प्रथम चार पद लिखिए, जबकि प्रथम पद $a = -1$ और सार्व अंतर $d = \frac{1}{2}$ है।

हल : $a = -1, d = \frac{1}{2}$ को $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$ में रखने पर हम वांछित A. P. प्राप्त करते हैं।

$-1, -1 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{2}{2}, -1 + \frac{3}{2}$ अर्थात् $-1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$. उत्तर।

प्रश्न 16. यदि A.P. में $a_{12} = 37$ और $d = 3$ दिया हुआ है।तो a और S_{12} ज्ञात कीजिए।

हल : $a_{12} = 37, d = 3$
माना कि A.P. का पहला पद a है तो

$a_{12} = 37 \quad \Rightarrow \quad a + 11d = 37$

$\Rightarrow \quad a + 11(3) = 37 \qquad [\because d = 3]$

$\Rightarrow \quad a = 37 - 33 = 4$

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ में, $n = 12, a = 4$ और $l = a_{12} = 37$ रखने पर,

$S_{12} = \frac{12}{2}(4 + 37) = 6 \times 41 = 246$

अतः $a = 4$ और $S_{12} = 246$; उत्तर।

प्रश्न 17. 3, 8, 13, 18, ... का कौन-सा पद 18 है?

(M. Q., Set–II : 2015)

हल : AP : 3, 8, 13, 18 ..... का कौन पद 18 है
$a = 3, \quad d = 5, \quad n = ?$
$a_n = a(n-1) \cdot d = 18 = 3 + (n-1) \cdot 5$

$\Rightarrow \quad \frac{15}{5} = (n-1) \Rightarrow 3 = n - 1$

$\therefore \quad n = 3 + 1 = 4$; उत्तर।

प्रश्न 18. समान्तर श्रेणी 3, 8, 13, 18 का कौन पद 78 है।

(M. Q., Set–V : 2015, 2016A, 2016C, 2017A)

हल : $a = 3, \qquad d = 8 - 3 = 5, \qquad n = ?$
$t_n = a + (n-1)d; \qquad 78 = 3 + (n-1) \times 5$

$\Rightarrow \quad 78 - 3 = 5(n-1) \quad \Rightarrow \quad 75 = 5(n-1)$

$\Rightarrow \quad (n-1) = \frac{75}{5} = 15 \quad \therefore \quad n = 15 + 1 = 16.$ उत्तर।

प्रश्न 19. यदि A.P. में $d = 5$ और $S_9 = 75$ दिया हुआ है।तो a और a_9 ज्ञात कीजिए।

हल : $d = 5, S_9 = 75$
माना कि A.P. का पहला पद a है तो $S_9 = 75$

$\Rightarrow \quad \frac{9}{2}[2a + (9-1)5] = 75 \Rightarrow \quad \frac{9}{2}[2a + 40] = 75$

$\Rightarrow \quad 9a + 180 = 75 \quad \Rightarrow \quad 9a = 75 - 180$

$\Rightarrow \quad a = \frac{-105}{9} = \frac{-35}{3}$

अब $a_9 = a + 8d = \frac{-35}{3} + 8 \times 5 = \frac{-35 + 120}{3} = \frac{85}{3}$

अतः $a = \frac{-35}{3}$ और $a_9 = \frac{85}{3}$; उत्तर।

प्रश्न 20. यदि A.P. में $l = 28$, $S = 144$ और कुल 9 पद हुआ है; तो a ज्ञात कीजिए। (M. Q., Set–I & III : 2015)

हल : $l = 28, S = 144, n = 9$

माना कि A.P. का पहला पद a है।

$$S = 144 \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{2}(a+l) = 144$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{2}(a+28) = 144 \quad \Rightarrow \quad a + 28 = 144 \times \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \quad a + 28 = 32 \quad \Rightarrow \quad a = 32 - 28 = 4$$

अत: $a = 4$; उत्तर।

प्रश्न 21. किसी A.P. का nवाँ पद $6n + 2$ है। उसका सार्व अंतर (C.D.) ज्ञात करें। (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : nवाँ पद $= 6n + 2$

$(n+1)$वाँ पद $= 6(n+1) + 2$

$\therefore$ $CD = 6(n+1) + 2 - (6n+2) = 6n + 6 + 2 - 6n - 2 = 6$; उत्तर।

प्रश्न 22. किसी A.P. का 17वाँ पद उसके 10वें पद से 7 अधिक है। इसका सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

हल : माना पहला पद a और सार्व अंतर d है।

दिया है $a_{17} - a_{10} = 7$

$$\Rightarrow \quad (a + 16d) - (a + 9d) = 7$$

$$\Rightarrow \quad 7d = 7 \quad \Rightarrow \quad d = 1$$

अत: सार्व अंतर 1 है; उत्तर।

प्रश्न 23. A.P. : 3, 8, 13, 18, 23 ..... का पन्द्रहवाँ पद निकालें। (M. Q., Set–V : 2016)

हल : $a = 3$, $d = 8 - 3 = 5$

$$t_{15} = a + (n-1)d = 3 + (15-1) \times 5$$

$$= 3 + 14 \times 5 = 3 + 70 = 73$$ उत्तर।

प्रश्न 24. A.P. : 3, 8, 13, ..., 253 में अंतिम पद से 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : l = अंतिम पद $= 253$ और d = सार्व अंतर $= 8 - 3 = 5$

$\therefore$ अंत से 20वाँ पद $= l - (20-1)d = l - 19d$

$$= 253 - 19 \times 5 = 253 - 95 = 158;$$ उत्तर।

प्रश्न 25. यदि समान्तर श्रेढ़ी का 11वाँ पद 38 और 16वाँ पद 73 हो; तो उसका 31वाँ पद ज्ञात कीजिए। (2013A, 2013C)

हल : $T_1 = a$, d = सार्व अन्तर

11वाँ पद, $T_{11} = a + (11-1)d = 38$

16वाँ पद, $T_{16} = a + (16-1)d = 73$

$$\Rightarrow \quad a + 10d = 38$$
$$a + 15d = 73$$
$$- \quad - \quad -$$
$$-5d = -35$$

$\therefore$ $d = 7$

तथा $a = 38 - 10 \times 7 = 38 - 70 = -32$

31वां पद $= -32 + (31-1) \times 7 = -32 + 30 \times 7$

$$= -32 + 210 = 178;$$ उत्तर।

प्रश्न 26. समांतर श्रेणी में 8, 3, –2, ... में प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए। (2011A)

हल : माना कि A.P. का पहला पद a तथा सार्व अंतर d है।

$a = 8$, $d = 3 - 8 = -5$, $n = 22$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{22}{2}[16 + 21(-5)]$$

$$= 11(16 - 105) = 11 \times (-89) = -979$$ उत्तर।

प्रश्न 27. समानांतर श्रेणी 2, 7, 12, ... का 10वाँ पद ज्ञात करें। (2011C)

हल : माना A.P. का पहला पद a तथा सार्व अंतर d है।

$a = 2$ और $d = 7 - 2 = 5$

हमें A.P. के 10 पदों का योग ज्ञात करना है।

$\therefore$ $t_n = a + (n-1)d$

$t_{10} = 2 + (10-1)5 = 47$. उत्तर।

प्रश्न 28. $\frac{4}{5}$, x, 2 किसी A.P. के क्रमागत पद हों, तो x का मान क्या होगा ? (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : $\frac{4}{5}$, x, 2 A. P. के पद हैं।

$\therefore$ $\left(x - \frac{4}{5}\right) = (2 - x)$

$$\Rightarrow \quad 2x = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5} \quad \therefore \quad x = \frac{7}{5}.$$

प्रश्न 29. A.P. 0.6, 1.7, 2.8, 3.9, ... के प्रथम पद एवं सार्व अन्तर ज्ञात करें। (2015A)

हल : माना A.P. का पहला पद a तथा सार्व अंतर d है तो

$a = 0.6$, $d = 1.7 - 0.6 = 1.1$ उत्तर।

हमें A.P. के 100 पदों का योग ज्ञात करना है।

$\therefore$ $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ में $a = 0.6$, $d = 1.1$, $n = 100$ रखने पर,

$$S_{100} = \frac{100}{2}[2 \times 0.6 + (100-1)1.1] = 50(1.2 + 99 \times 1.1)$$

$$= 50(1.2 + 108.9) = 50 \times 110.1 = 5505;$$ उत्तर।

प्रश्न 30. प्रथम 1000 धन पूर्णांकों का योग निकालें। (2015C)

हल : $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 1000$

$a = 1$, $d = 1$, $l = 1000$, $n = 1000$

$$S_{1000} = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{1000(1+1000)}{2}$$

$$= 500 \times 1001 = 500500.$$ उत्तर।

प्रश्न 31. यदि A.P. का nवाँ पद $3n + 1$ हो तो A.P. निकालें। (M. Q., Set–I : 2016)

हल : nवाँ पद $= 3n + 1$

$(n+1)$ वाँ पद $= 3(n+1) + 1$

सार्व अंतर (C.D.) $= 3(n+1) + 1 - (3n+1)$

$$= 3n + 3 + 1 - 3n - 1 = 3$$

पहला पद $= 3n + 1 = 3 \times 1 + 1 = 3 + 1 = 4$

$\therefore$ 4, 7, 10, 13, 16 ..... उत्तर।

प्रश्न 32. समानान्तर श्रेणी ज्ञात करें जिसका तीसरा पद 5 और 7 वाँ पद 9 हैं। (2011C)

हल : $\because$ $t_n = a + (n-1)d$

$\therefore$ $t_3 = a + (3-1)d = a + 2d = 5$ ...(1)

$t_7 = a + (7-1)d = a + 6d = 9$ ...(2)

समी॰ (2) में (1) को घटाने पर,

$a + 6d - (a + 2d) = 9 - 5$

$4d = 4$ $\quad \therefore \quad d = 1$

समी॰ (1) में d का मान रखने पर,

$a + 2 \times 1 = 5$ या, $a + 2 = 5$

$a = 3$ अत: अभीष्ट समानान्तर श्रेणी।

a, (a+d), (a+2d), (a+3d).....अर्थात् 3, 4, 5, 6, 7 उत्तर।

प्रश्न 33. एक A.P. में 50 पद हैं, जिसका तीसरा पद 12 है और अंतिम पद 106 है। इसका 29वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल माना पहला पद a तथा सार्व अंतर d है।

अब, $a_n = a + (n-1)d$ $\quad\therefore\quad a_3 = a + 2d = 12$ ...(1)

और $a_{50} = a + 49d = 106$ ...(2)

समीकरण (2) में से (1) घटाने पर,

$47d = 94 \quad\Rightarrow\quad d = \frac{94}{47} = 2$

और तब समीकरण (1) से,

$a + 2 \times 2 = 12 \quad\Rightarrow\quad a = 12 - 4 = 8$

$\therefore\quad a_{29} = a + 28d = 8 + 28 \times 2 = 8 + 56 = 64$; उत्तर।

प्रश्न 34. क्या A.P. : 11, 8, 5, 2, ... का एक पद –150 है ? क्यों ?

हल यहाँ, $a_2 - a_1 = 8 - 11 = -3$

$a_3 - a_2 = 5 - 8 = -3$

$a_4 - a_3 = 2 - 5 = -3$

$a_{n+1} - a_n$ हर बार समान है। अत: दी गई संख्या A.P. का पद है।

अब, $a = 11, d = -3$

माना A.P. का nवाँ पद –150 है।

हम जानते हैं कि $a_n = a + (n-1)d$

$\Rightarrow\quad -150 = 11 + (n-1)(-3)$

$\Rightarrow\quad -3(n-1) = -150 - 11 = -161$

$\Rightarrow\quad n - 1 = \frac{161}{3} \quad\Rightarrow\quad n = \frac{161}{3} + 1 = \frac{164}{3}$

लेकिन nवाँ पद धनात्मक पूर्णांक है। अत: हमारा मानना गलत था।

अत: –150 A.P. का पद नहीं है; उत्तर।

प्रश्न 35. उस A.P. का 31वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका 11वाँ पद 38 है और 16वाँ पद 73 है। (M. Q., Set–V : 2011, 2013A, 2017A)

हल माना a पहला पद है और सार्व अंतर d है।

अब, $a_n = a + (n-1)d$ $\quad\therefore\quad a_{11} = a + 10d = 38$ ...(1)

और $a_{16} = a + 15d = 73$ ...(2)

समीकरण (2) में से (1) घटाने पर,

$5d = 35 \quad\Rightarrow\quad d = \frac{35}{5} = 7$

और तब समीकरण (1) से,

$a + 10 \times 7 = 38 \quad\Rightarrow\quad a = 38 - 70 = -32$

$\therefore\quad a_{31} = a + 30d = -32 + 30 \times 7 = -32 + 210 = 178$; उत्तर।

प्रश्न 36. दो अंकों वाली कितनी संख्याएँ 3 से विभाज्य हैं ? (M. Q., Set–II : 2011)

हल 10, 11, 12, 13, ..., 99 में 3 से विभाज्य संख्याएँ 12, 15, 18, 21, 24, ..., 99

यहाँ स. श्रे. के लिए $a = 12, d = 15 - 12 = 3$

अन्तिम पद $= 99 = 12 + (n-1) \times 3$

$\Rightarrow\quad \frac{99-12}{3} = n - 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{87}{3} = n - 1$

या, $n - 1 = 29 \quad\therefore\quad n = 30.$ उत्तर।

प्रश्न 37. तीन अंकों वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य है ?

हल 994, 7 से विभाजित होने वाली 3 अंकों की अंतिम संख्या है। अत: 7 से विभाजित होने वाली संख्याओं की श्रेढ़ी 105, 112, 119, ..., 994

स्पष्टत: यह एक A.P. बनाती है जिसका पहला पद $a = 105$

और सार्व अंतर $d = 112 - 105 = 7$

माना A.P. में n पद हैं तो nवाँ पद $= 994$

$a_n = a + (n-1)d \quad\Rightarrow\quad 105 + (n-1)7 = 994$

$\Rightarrow\quad 7(n-1) = 994 - 105 \quad\Rightarrow\quad 7(n-1) = 889$

$\Rightarrow\quad n - 1 = \frac{889}{7} = 127 \quad\Rightarrow\quad n = 127 + 1 = 128$

अत:, यहाँ 7 से विभाजित होने वाली 3 अंकों की 128 संख्याएँ हैं; उत्तर।

प्रश्न 38. यदि किसी A.P. के तीसरे और नौवें पद क्रमश: 4 और –8 हैं, तो इसका कौन-सा पद शून्य होगा ? (M. Q., Set–V : 2015)

हल : माना पहला पद a और सार्व अंतर d है।

$a_3 = a + 2d = 4$ ...(1)

$a_9 = a + 8d = -8$ ...(2)

समीकरण (2) में से (1) घटाने पर,

$6d = -12 \quad\Rightarrow\quad d = \frac{-12}{6} = -2$

और समीकरण (1) से,

$a + 2 \times -2 = 4 \quad\Rightarrow\quad a = 4 + 4 = 8$

माना $a_n = 0 \quad\Rightarrow\quad a + (n-1)d = 0$

$\Rightarrow\quad 8 + (n-1)(-2) = 0 \quad\Rightarrow\quad (n-1)(-2) = -8$

$\Rightarrow\quad n - 1 = \frac{-8}{-2} = 4 \quad\Rightarrow\quad n = 4 + 1 = 5$

अत:, 5वाँ पद शून्य होगा; उत्तर।

प्रश्न 39. सुब्बा राव ने 1995 में 5000 रु० के मासिक वेतन पर कार्य आरंभ किया और प्रत्येक वर्ष 200 रु० की वेतन वृद्धि प्राप्त की। किस वर्ष में उसका वेतन 7000 रु० हो गया ?

हल : सुब्बा राव ने वर्ष 1995, 1996, 1997 आदि में 5,000 रु०, 5,200 रु०, 5,400 रु०, ..., 7,000 रु० का वार्षिक वेतन लिया।

इन अंकों की श्रेढ़ी 5000, 5200, 5400, ..., 7000 है।

यह A.P. बनाती है $\quad[\because a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 200]$

माना $a_n = 7000$

$\Rightarrow\quad 7000 = a + (n-1)d \quad\Rightarrow\quad 7000 = 5000 + (n-1)(200)$

$\Rightarrow\quad 200(n-1) = 7000 - 5000$

$\Rightarrow\quad n - 1 = \frac{2000}{200} = 10 \quad\Rightarrow\quad n = 10 + 1 = 11.$

अत: 11 वर्ष में (अर्थात् 2005 में) सुब्बा राव 7,000 रु. का वार्षिक वेतन लेगा; उत्तर।

प्रश्न 40. दो समांतर श्रेढ़ियों का सार्व अंतर समान है। यदि इनके 100वें पदों का अंतर 100 है, तो इनके 1000वें पदों का अंतर क्या होगा ?

हल : माना $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ और $b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$ दो A.P. हैं।

माना दोनों A.P. का सार्व अंतर d है तो

$a_n = a_1 + (n-1)d \quad$ और $\quad b_n = b_1 + (n-1)d$

$\Rightarrow\quad a_n - b_n = [a_1 + (n-1)d] - [b_1 + (n-1)d]$

$\Rightarrow\quad a_n - b_n = a_1 - b_1$ सभी $n \in N$

$\Rightarrow\quad a_{100} - b_{100} = a_1 - b_1 = 100$ [दिया है]

अब, $a_{1000} - b_{1000} = a_1 - b_1$

$\Rightarrow\quad a_{1000} - b_{1000} = 100 \quad[\because a_1 - b_1 = 100]$

अत: 1000वें पद का अंतर भी 100वें पद के अंतर के समान होगा यानी 100 होगा; उत्तर।

प्रश्न 41. 10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज हैं ?

हल : 10 और 250 के बीच 12 पहला पूर्णांक है जो 4 का गुणज है (अर्थात् 4 से भाज्य है)। जब हम 250 को 4 से भाग देते हैं तो शेष 2 बचता है। अत: $250 - 2 = 248$ एक पूर्णांक है जो 4 से विभाजित हो जाता है और जो 10 और 250 के बीच में है। अत: हम A.P. के पद की संख्या ज्ञात करते हैं जिसका पहला पद = 12, अंतिम पद = 248 और सार्व अंतर = 4 है।

माना A.P. में n पद हैं तो

$a_n = 248 \quad\Rightarrow\quad 12 + (n-1)\,4 = 248$

$\Rightarrow\quad 4(n-1) = 248 - 12 \quad\Rightarrow\quad 4(n-1) = 236$

$\Rightarrow\quad n - 1 = \frac{236}{4} = 59 \quad\Rightarrow\quad n = 59 + 1 = 60$

अत: 10 और 250 के बीच में 4 के 60 गुणज हैं; उत्तर।

प्रश्न 42. A.P. : 3, 15, 27, 39, ... का कौन-सा पद उसके 54वें पद से 132 अधिक होगा ? (M. Q., Set–III : 2011)

हल : यहाँ, $a = 3, d = 15 - 3 = 12$ तो,

$a_{54} = a + 53d = 3 + 53 \times 12 = 3 + 636 = 639$

माना a_n पद इसके 54वें पद से 132 अधिक है।

अर्थात् $a_n = a_{54} + 132 = 639 + 132 = 771$

$\Rightarrow a + (n-1)d = 771 \quad \Rightarrow 3 + (n-1)12 = 771$

$\Rightarrow 12(n-1) = 771 - 3 \quad \Rightarrow 12(n-1) = 768$

$\Rightarrow n - 1 = \frac{768}{12} = 64 \quad \Rightarrow n = 64 + 1 = 65$

अत: इसका 65वाँ पद 54वें पद से 132 अधिक होगा; उत्तर।

प्रश्न 43. n के किस मान के लिए, दोनों समांतर श्रेढ़ियों 63, 65, 67, ... और 3, 10, 17, ... के nवें पद बराबर होंगे ?

हल : यदि A.P. 63, 65, 67, ... और 3, 10, 17, ... के nवाँ पद समान हैं तो

$63 + (n-1)\,2 = 3 + (n-1)7$

[∵ पहले A.P. में $a = 63, d = 65 - 63 = 2$ और दूसरे A.P. में $a = 3, d = 10 - 3 = 7$]

$\Rightarrow 7(n-1) - 2(n-1) = 63 - 3$

$\Rightarrow (n-1)(7-2) = 60 \quad \Rightarrow 5(n-1) = 60$

$\Rightarrow n - 1 = \frac{60}{5} = 12 \quad \Rightarrow n = 12 + 1 = 13$

अत: दोनों A.P. का 13वाँ पद समान होगा। उत्तर।

प्रश्न 44. वह A.P. ज्ञात कीजिए जिसका तीसरा पद 16 है और 7वाँ पद 5वें पद से 12 अधिक है।

हल : माना पहला पद a है और सार्व अंतर d है।

यहाँ, $a_3 = 16$ और $a_7 - a_5 = 12$

$\Rightarrow a + 2d = 16 \quad ...(1)$

और $(a + 6d) - (a + 4d) = 12$

$\Rightarrow 2d = 12$

$\Rightarrow d = 6 \quad ...(2)$

समीकरण (1) में $d = 6$ रखने पर,

$a + 2 \times 6 = 16$

$\Rightarrow a = 16 - 12 = 4$

अत: वांछित A.P. $4, 4 + 6, 4 + 2 \times 6, 4 + 3 \times 6, ...$ अर्थात् 4, 10, 16, 22, ... है; उत्तर।

प्रश्न 45. रामकली ने किसी वर्ष के प्रथम सप्ताह में 5 रु. की बचत की और फिर अपनी साप्ताहिक बचत 1.75 रु. बढ़ाती गई। यदि nवें सप्ताह में उसकी साप्ताहिक बचत 20.75 रु. हो जाती है, तो n ज्ञात कीजिए।

हल : रामकली की प्रथम, द्वितीय, तृतीय ..... सप्ताह में बचत है :

$5, 5 + 1.75, 5 + 2 \times 1.75, 5 + 3 \times 1.75, ...$

यह एक A.P. है जिसका $a = 5$ तथा $d = 1.75$ है।

$a_n = a + (n-1)d \quad \Rightarrow 20.75 = 5 + (n-1) \times 1.75$

$\Rightarrow n - 1 = \frac{15.75}{1.75} = 9 \quad \Rightarrow n = 9 + 1 = 10$; उत्तर।

प्रश्न 46. उस स० श्रे० का nपदों का योगफल ज्ञात करें जिसका प्रथम पद a तथा पदान्तर d है। (M. Q., Set–II : 2011)

हल : स. श्रेणी. का पहला पद $= a$, पदान्तर $= d$

माना nवाँ पद $= a + (n-1)\,d = l$

$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + ... + l$

$S_n = l + (l - d) + ... + a$

$2S_n = (a + l) + (a + l) + ... + (a + l) = n\,(a + l)$

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}[a + l] = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ उत्तर।

प्रश्न 47. एक A. P. में $a = 5, d = 3$ और $a_n = 50$ है, तो n और S_n ज्ञात करें। (2016A)

हल : दिया हुआ है कि $a = 5, d = 3, a_n = 50, n = ?, S_n = ?$

सूत्र से, $a_n = a + (n-1)d \quad 50 = +5(n-1)3$

$\Rightarrow 50 - 5 = 3(n-1) \quad \Rightarrow 3(n-1) = 45$

$\therefore \quad n - 1 = \frac{45}{3} = 15 \quad \therefore \quad n - 1 = 15$

$\therefore \quad n = 15 + 1 = 16$

सूत्र से, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$= \frac{16}{2}\{2.5 + (16-1) \times 3 = 8(10 + 15 \times 3)$

$= 8(10 + 45) = 8 \times 55 = 440$

अत: $n = 16$ तथा $S_n = 440$. उत्तर।

प्रश्न 48. किसी A.P. का प्रथम पद 5, अंतिम पद 45 और योग 400 है। पदों की संख्या और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि A.P. का पहला पद a तथा सार्व अंतर d है।

$a = 5, l = 45$ और $S = 400$

$\therefore \quad S = 400 \quad \Rightarrow \quad (a + l) = 400$

$\Rightarrow n(5 + 45) = 400 \times 2 \quad \Rightarrow n(50) = 400 \times 2$

$\Rightarrow n = \frac{400 \times 2}{50} = 8 \times 2 = 16$

और $l = 45 \quad \Rightarrow a + (n-1)d = 45$

$\Rightarrow 5 + (16-1)d = 45 \quad \Rightarrow 15d = 45 - 5 = 40$

$\Rightarrow d = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$

अत: पदों की संख्या 16 और सार्व अंतर $\frac{8}{3}$ है; उत्तर।

प्रश्न 49. किसी A.P. के प्रथम और अंतिम पद क्रमश: 17 और 350 हैं। यदि सार्व अंतर 9 है, तो इसमें कितने पद हैं और इनका योग क्या है ?

हल : माना कि पहला पद a और सार्व अंतर d है। पुन: माना कि l अंतिम पद है।

तो $a = 17, l = a_n = 350, d = 9$.

$\Rightarrow a + (n-1)d = 350 \quad \Rightarrow 17 + (n-1)9 = 350$

$\Rightarrow 9(n-1) = 350 - 17 = 333$

$\Rightarrow n - 1 = \frac{333}{9} = 37 \quad \Rightarrow n = 37 + 1 = 38$

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ में $a = 17, l = 350, n = 38$ रखने पर,

$S_{38} = \frac{38}{2}(17 + 350) = 19 \times 367 = 6973$

अत: A.P. में 38 पद हैं तथा इनका योग 6973 है; उत्तर।

प्रश्न 50. उस A.P. के प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसमें $d = 7$ है और 22वाँ पद 149 है।

हल : माना कि A.P. का पहला पद a तथा सार्व अंतर d है तो

$d = 7$ और $a_{22} = 149 \quad \Rightarrow a + (22-1)d = 149$

$\Rightarrow a + 21 \times 7 = 149 \quad \Rightarrow a = 149 - 147 = 2$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ में $n = 22, a = 2$ तथा $d = 7$ रखने पर,

$S_{22} = \frac{22}{2}[2 \times 2 + (22-1)7] = 11(4 + 21 \times 7)$

$= 11(4 + 147) = 11 \times 151 = 1661$

अत: पहले 22 पदों का योग 1661 है; उत्तर।

प्रश्न 51. उस A.P. के प्रथम 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसके दूसरे और तीसरे पद क्रमशः 14 और 18 हैं। (M. Q., Set–III : 2011)

हल : माना A.P. का पहला पद a तथा सार्व अंतर d है।

$a_2 = 14$ और $a_3 = 18$

$\Rightarrow a + d = 14$ और $a + 2d = 18$

समीकरणों को हल करने पर,

$d = 4$ और $a = 10$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ में $a = 10, d = 4$ और $n = 51$ रखने पर,

$$S_{51} = \frac{51}{2}[2 \times 10 + (51-1) \times 4]$$

$$= \frac{51}{2}[20 + 50 \times 4] = \frac{51}{2}(20 + 200)$$

$$= \frac{51}{2} \times 220 = 51 \times 110 = 5610$$

अतः 51 पदों का योग 5610 है; उत्तर।

प्रश्न 52. यदि किसी समकोण त्रिभुज की भुजाएँ सम श्रेढ़ (A.P.) में हों तो सिद्ध करें कि उनकी लंबाइयाँ 3 : 4 : 5 के अनुपात में होंगी। (M. Q., Set–II : 2011)

हल : माना समकोण त्रिभुज की भुजाएँ $a - d$, a तथा $a + d$ हैं।

$\therefore \quad (a+d)^2 = a^2 + (a-d)^2$

$\Rightarrow \quad a^2 + d^2 + 2ad = a^2 + a^2 + d^2 - 2ad$

$\Rightarrow \quad a^2 + 4ad$ या, $a = 4d$

$\therefore$ भुजाएँ हैं : $4d - d, 4d, 4d + d$

$\Rightarrow 3d, 4d, 5d$

अनुपात = 3 : 4 : 5. सिद्ध हुआ।

प्रश्न 53. 8 के प्रथम 15 गुणजों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : 8 के प्रथम 15 गुणज हैं $8 \times 1, 8 \times 2, 8 \times 3, ..., 8 \times 15$.

अर्थात् 8, 16, 24, ..., 120, जो A.P. है।

$\therefore$ 8 के प्रथम 15 गुणजों का योग $= \frac{15}{2}(8 + 120)$

$$= \frac{15}{2} \times 128 \quad \left[S_n = \frac{n}{2}(a+l)\right]$$

$= 15 \times 64 = 960$; उत्तर।

प्रश्न 54. 8 के प्रथम 15 गुणजों का योग ज्ञात कीजिए। (2016C)

हल : $8 + 16 + 24 + ... + 120$

$a = 8, \quad d = 16 - 8 = 8$

$\therefore \quad t_n = a + (n-1)d \qquad 120 = 8 + (n-1)8$

$\Rightarrow \quad 120 - 8 = (n-1)8 \quad \Rightarrow \quad 112 = (n-1)8$

$\Rightarrow \quad n - 1 = \frac{112}{8} = 14 \qquad \therefore \quad n = 14 + 1 = 15$

$$\Sigma_n = \frac{n}{2}(a + t_n) = \frac{15}{2}(8 + 120) = \frac{15}{2} \times 128 = 960.$$ उत्तर।

Exercise

प्रश्न 1. यदि दो त्रिभुजों में संगत कोण बराबर हों तथा उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हों, तो दोनों Δ आपस में क्या हो सकते हैं? (2011A)

उत्तर : समरूप

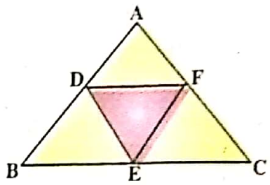
प्रश्न 2. ऐसे समकोण त्रिभुज की रचना की संभावना ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ 5 cm, 6 cm और 8 cm हों। (M. Q., Set–I : 2011)

उत्तर : सम्भव नहीं।

प्रश्न 3. 'एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।' इस प्रमेय को किसने प्रतिपादित किया? (2011A)

हल : पाइथागोरस।

प्रश्न 4. ΔABC की भुजाओं के मध्यबिन्दु क्रमशः D, E और F हों तो $\frac{ar(DEF)}{ar(ABC)}$ का मान ज्ञात करें। (M. Q., Set–IV : 2011)



हल : $\frac{ar(\Delta DEF)}{ar(\Delta ABC)} = \frac{1}{4}$

प्रश्न 5. ΔABC में, $AB = 6\sqrt{3}$ सेमी, $AC = 12$ सेमी और $BC = 6$ सेमी, तो $\angle B$ का मान ज्ञात करें। (2011C)

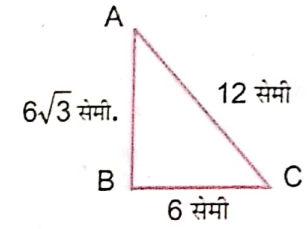
हल : $AB^2 + BC^2 = AC^2$

या, $(6\sqrt{3})^2 + (6)^2 = (12)^2$

या, $108 + 36 = 144$

या, $144 = 144$

पाइथागोरस प्रमेय के विलोम से ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle B = 90°$ है। उत्तर।



प्रश्न 6. किसी चक्रीय चतुर्भुज के आमने-सामने का कोण 4 : 5 के अनुपात में है, तो कोणों का मान ज्ञात करें। (2012A, 2015C)

हल : चक्रीय चतुर्भुज के आमने-सामने के कोण सम्पूरक होते हैं।

$\therefore \quad \angle B + \angle D = 180° \quad \Rightarrow \quad 4x + 5x = 180°$

$\Rightarrow \quad 9x = 180° \qquad \therefore \quad x = \frac{180}{9} = 20°$

$$\left.\begin{aligned} 4x &= 4 \times 20° = 80° \\ 5x &= 5 \times 20° = 100° \end{aligned}\right\}$$ उत्तर।

प्रश्न 7. समान संख्या के भुजाओं वाले बहुभुजों के समरूप होने की आवश्यक शर्त्तों को लिखें। (M. Q., Set–I : 2011, M. Q., Set–III : 2015)

हल : (i) सभी संगत कोण बराबर हों।

(ii) सभी संगत भुजाएँ समानुपाती हों।

प्रश्न 8. दो त्रिभुजों के समरूप होने की किन्हीं दो शर्त्तों को लिखें। (M. Q., Set–III : 2011)

अथवा, दो त्रिभुजों के समरूप होने की दो शर्त्तों को लिखें। (2011A, 2012C, M. Q., Set–III : 2016)

हल : दो त्रिभुजों के समरूप होने की शर्तें इस प्रकार हैं–

(i) दो त्रिभुजों में संगत कोण बराबर हों अर्थात् दोनों त्रिभुज समकोणिक हों।

(ii) दो त्रिभुजों की संगत भुजाएँ आनुपातिक हों और संगत भुजाओं से अंतरित कोण बराबर हों।

प्रश्न 9. दो समरूप त्रिभुजों की परिमाप 30 cm और 20 cm है। यदि पहले त्रिभुज की एक भुजा 12 cm हो, तो दूसरे त्रिभुज की संगत भुजा निकालें। (M. Q., Set–III : 2015)

हल : $\frac{\text{परिमाप } \Delta(ABC)}{\text{परिमाप } \Delta(DEF)} = \frac{BC}{EF}$

$\Rightarrow \quad \frac{30}{20} = \frac{12}{x}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{20 \times 12}{30} = 8$ cm. उत्तर।

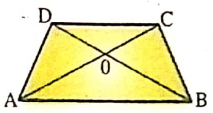
प्रश्न 10. समलम्ब चतुर्भुज ABCD में AB ∥ CD और AB = 2CD यदि ΔAOB का क्षेत्रफल 84 cm^2 हो तो ΔCOD का क्षेत्रफल निकालें। (M. Q., Set–I : 2015)

हल : चूँकि ΔAOB समरूप हैं ΔCOD के और माना कि $ar(\Delta COD) = x$

$$\therefore \quad \frac{ar(\Delta AOB)}{ar(\Delta COD)} = \frac{AB^2}{CD^2} \Rightarrow \frac{84}{x} = \left(\frac{2CD}{CD}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{84}{x} = 4$$

$$\therefore \quad x = \frac{84}{4} = 21 cm^2$$

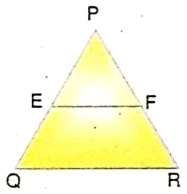


प्रश्न 11. ΔPQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः बिन्दुएँ E और F स्थित हैं। यदि PE = 6 सेमी, QE = 6.6 सेमी, PF = 9 सेमी तथा RF = 9.9 सेमी हैं, तो सिद्ध करें कि EF ∥ QR है। (2014C)

हल : दिया हुआ है कि PE = 6 cm, QE = 6.6 cm,
PF = 9 cm, RF = 9.9 cm

$$\frac{PE}{QE} = \frac{6}{6.6} = \frac{1}{1.1} \quad \text{... (i)}$$

$$\frac{PF}{RF} = \frac{9}{9.9} = \frac{1}{1.1} \quad \text{... (ii)}$$



समीकरण (i) और (ii) से,

$$\frac{PE}{QE} = \frac{PF}{RF}$$

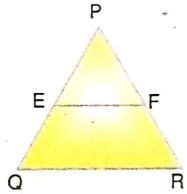
∴ आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय के विलोम से EF ∥ QR. Proved.

प्रश्न 12. किसी ΔPQR की भुजाएँ PQ और PR पर क्रमशः बिंदु E और F स्थित हैं। यदि PE = 4 सेमी॰, QE = 4.5 सेमी॰, PF = 8 सेमी॰ और RF = 9 सेमी॰ हो तो बताइए कि क्या EF ∥ QR है ? (2014A)

हल : PE = 4 सेमी॰, QE = 4.5 सेमी॰,
PF = 8 सेमी॰, RF = 9 सेमी॰

$$\frac{PE}{QE} = \frac{4}{4.5} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9} \quad \text{... (1)}$$

$$\frac{PF}{RF} = \frac{8}{9} \quad \text{... (2)}$$

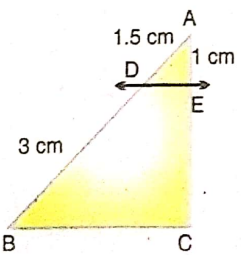


समीकरण (1) और (2) से,

$$\frac{PE}{QE} = \frac{PF}{RF}$$

∴ आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय के विलोम से EF ∥ QR.

प्रश्न 13. आकृति में DE ∥ BC है; तो EC ज्ञात कीजिए। (2016A)



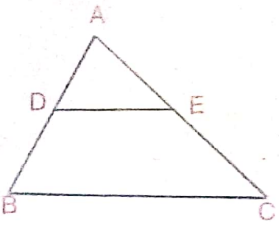
हल : ΔABC में, DE ∥ BC .... (दिया है)

$$\therefore \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$ [आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय का प्रयोग करने पर]

$$\frac{1.5}{3} = \frac{1}{EC} \qquad EC = \frac{3}{1.5}$$

$$EC = \frac{3 \times 10}{15} = 2 \qquad \therefore \quad EC = 2 \text{ cm; उत्तर}$$

प्रश्न 14. दी गई आकृति में DE ∥ BC और $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$। यदि AC = 4.8 सेमी॰ हो, तो AE का मान ज्ञात कीजिए। (2013C)



हल : $\because \quad \frac{AD}{DB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AD}{DB} + 1 = \frac{3}{5} + 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{AD + DB}{DB} = \frac{3+5}{5} \Rightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{8}{5}$$

आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से ;

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{DB} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AD + DB}{DB} = \frac{AE + EC}{EC} \Rightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8}{5} = \frac{4.8}{EC} \qquad \therefore \quad EC = \frac{4.8 \times 5}{8} = \frac{24.0}{8} = 3 \text{ सेमी}$$

∴ AC = AE + EC;

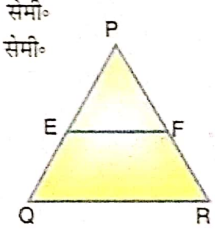
AE = AC – EC = 4.8 – 3 = 1.8 सेमी उत्तर।

प्रश्न 15. किसी ΔPQR की भुजाएँ PQ और PR पर क्रमशः बिंदु E और F स्थित हैं। यदि PQ = 1.28 सेमी॰, PR = 2.56 सेमी॰, PE = 0.18 सेमी॰ और PF = 0.36 सेमी॰ हो; तो बताइए कि क्या EF ∥ QR है ? (2014A)

हल : PQ = 1.28 सेमी॰, PR = 2.56 सेमी॰,
PE = 0.18 सेमी॰, PF = 0.36 सेमी॰

EQ = PQ – PE = 1.28 – 0.18 = 1.10 सेमी॰

FR = PR – PF = 2.56 – 0.36 = 2.20 सेमी॰



यहाँ $\frac{PE}{EQ} = \frac{0.18}{1.10} = \frac{18}{110} = \frac{9}{55}$ ... (1)

और $\frac{PF}{FR} = \frac{0.36}{2.20} = \frac{36}{220} = \frac{9}{55}$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से,

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

∴ आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय के विलोम से EF ∥ QR.

प्रश्न 16. ΔABC ~ ΔDEF; AB = 5cm, $ar(ABC) = 20 cm^2$ तथा $ar(DEF) = 45 cm^2$ तो DE = ? (M. Q., Set–IV : 2011, M. Q., Set–II : 2016)

हल : Δ ABC ~ Δ DEF; AB = 5 cm.

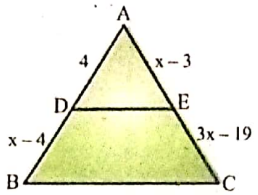
$ar(\Delta ABC) = 20$; $ar(\Delta DEF) = 45$

$$\frac{(DE)^2}{(AB)^2} = \frac{45}{20}$$

$$\Rightarrow \quad (DE)^2 = \frac{45}{20} \times 5^2 = \frac{45 \times 5}{4} = \frac{9 \times 25}{4}$$

$$\therefore \quad DE = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2} = 7.2 \text{ cm. उत्तर।}$$

प्रश्न 17. दी गयी आकृति में, DE ∥ BC तो x का मान निकालें। (M. Q., Set–II : 2015)



हल : $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}; \qquad \frac{4}{x-4} = \frac{x-3}{3x-19}$

$\Rightarrow \quad 4(3x - 19) = (x - 3)(x - 4)$

$\Rightarrow \quad 12x - 76 = x^2 - 7x + 12$

$\Rightarrow \quad x^2 - 7x + 12 - 12x + 76 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 19x + 88 = 0$

$x^2 - 11x - 8x + 88 = 0$

$\Rightarrow \quad x(x - 11) - 8(x - 11) = 0$

$\Rightarrow \quad (x - 8)(x - 11) = 0$

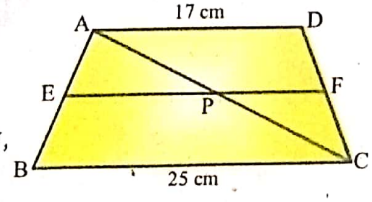
$\therefore \quad x = 8, 11.$ उत्तर।

प्रश्न 18. समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाओं की लम्बाइयाँ क्रमशः 17 सेमी. और 25 सेमी. हैं, तो असमान्तर भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा की लम्बाई निकालें। (2015C)

हल : माना कि E, AB का मध्य बिन्दु है।

$\frac{AE}{EB} = 1 \qquad \ldots (i)$

पुनः F, DC का मध्य बिन्दु है।



$\therefore \quad \frac{DF}{FC} = 1 \qquad \ldots (ii)$

समीकरण (i) और (ii) से,

$\frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC}$

$\therefore$ थेल्स प्रमेय के विलोम के अनुसार,

$EF \parallel BC \parallel AD$

हम जानते हैं कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समानांतर तथा आधी होती है।

त्रिभुज ABC में,

$$EP = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 25 = 12.5 \text{ cm.}$$

त्रिभुज ADC में,

$$PF = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \times 17 = 8.5 \text{ cm.}$$

$\therefore \quad EF = EP + PF = 12.5 + 8.5 = 21$ cm. उत्तर।

प्रश्न 19. दो समरूप ΔABC और ΔPQR का परिमाप क्रमशः 36 सेमी और 24 सेमी है। यदि PQ = 10 सेमी; तो AB का मान निकालें। (M. Q., Set–V : 2016)

हल : $\frac{\Delta ABC \text{ की परिमाप}}{\Delta PQR \text{ की परिमाप}} = \frac{AB}{PQ}$

$\Rightarrow \quad \frac{36}{24} = \frac{AB}{10} \qquad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} = \frac{AB}{10}$

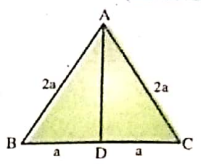
$\therefore \quad AB = \frac{3 \times 10}{2} = 3 \times 5 = 15$ cm. उत्तर।

प्रश्न 20. एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा $2a$ है। उसके शीर्ष लम्ब ज्ञात कीजिए। (2016A)

हल : ΔABC में

$AB = BC = CA = 2a$

तथा $AD \perp BC$



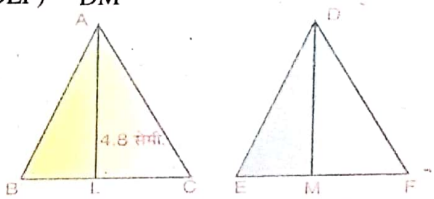
$\therefore \quad AD = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2}$

$= \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3},$ उत्तर।

प्रश्न 21. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल 36 सेमी.^{2} एवं 81 सेमी.^{2} हैं। यदि पहले त्रिभुज की ऊँचाई 4.8 सेमी. हो, तो दूसरे त्रिभुज की संगत ऊँचाई ज्ञात करें। (2012A)

हल : हम जानते हैं कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल का अनुपात उनकी संगत ऊँचाइयों के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

$\frac{\text{क्षे० } (\Delta ABC)}{\text{क्षे० } (\Delta DEF)} = \frac{AL^2}{DM^2}$

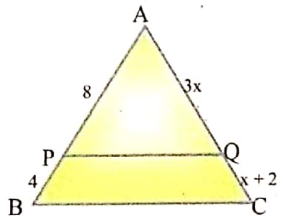


$\Rightarrow \quad \frac{36}{81} = \frac{AL^2}{DM^2} \qquad \therefore \quad \frac{AL}{DM} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9}$

$\because \quad AL = 4.8$ सेमी० $\qquad \therefore \quad \frac{4.8}{DM} = \frac{6}{9}$

$\therefore \quad DM = \frac{9 \times 4.8}{6} = 3 \times 2.4 = 7.2$ सेमी० उत्तर।

प्रश्न 22. त्रिभुज ABC में PQ ∥ BC है, तो x का मान निकालें। (2015C)



हल : थेल्स प्रमेय के अनुसार ;

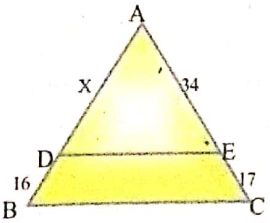
$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}; \qquad \frac{8}{4} = \frac{3x}{x+2}$

$\Rightarrow \quad 4 \times 3x = 8(x + 2) \qquad \Rightarrow \quad 12x = 8x + 16$

$\Rightarrow \quad 12x - 8x = 16 \qquad \Rightarrow \quad 4x = 16$

$\therefore \quad x = \frac{16}{4} = 4$ उत्तर।

प्रश्न 23. यदि DE ∥ BC तो x का मान बतावें। (2016C)



हल : थेल्स प्रमेय से,

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \qquad \Rightarrow \quad \frac{x}{16} = \frac{34}{17}$

$\Rightarrow \quad x = 16 \times 2 = 32.$ उत्तर।

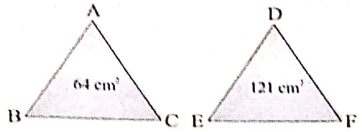
प्रश्न 24. मान लीजिए कि ΔABC और ΔDEF समरूप हैं और इनके क्षेत्रफल क्रमशः 64 वर्ग सेमी. और 121 वर्ग सेमी. हैं। यदि $EF = 15.4$ सेमी तो BC ज्ञात कीजिए। **(2016A)**

हल : दो त्रिभुजों के क्षेत्रफल का अनुपात, उन त्रिभुजों की भुजाओं के वर्ग के अनुपात के बराबर होते हैं।

$$\therefore \quad \frac{ar(\Delta ABC)}{ar(DEF)} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

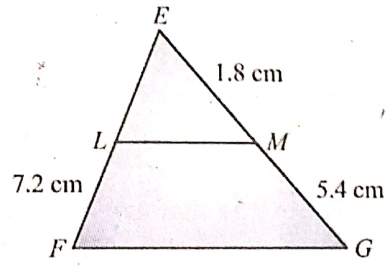
$$\Rightarrow \quad \frac{64}{121} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{EF} = \sqrt{\frac{64}{121}} = \frac{8}{11}$$



$$\therefore \quad BC = \frac{EF \times 8}{11} = \frac{15.4 \times 8}{11} = \frac{123.2}{11} = 11.2 \text{ cm.}$$ उत्तर।

प्रश्न 25. दी गई आकृति में LF ज्ञात करें जहाँ $LM \parallel FG$. **(2016A)**



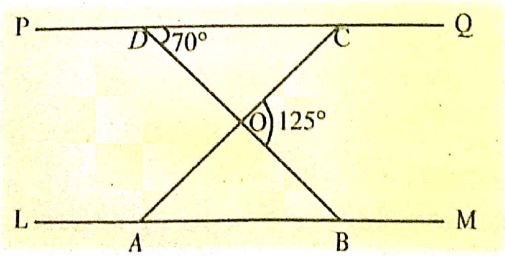
हल : $\because LM \parallel FG$

$\therefore$ थेल्स प्रमेय से,

$$\frac{EL}{LF} = \frac{EM}{MG} \qquad \frac{EL}{7.2} = \frac{1.8}{5.4} = \frac{18}{54} = \frac{1}{3}$$

या, $3EL = 7.2$ $\qquad \therefore \quad EL = \frac{7.2}{3} = 2.4$ सेमी. उत्तर।

प्रश्न 26. दी गई आकृति में यदि $LM \parallel PQ$, $\angle BOC = 125°$ तथा $\angle CDO = 70°$ हैं, तो $\angle DOC$ तथा $\angle DCO$ ज्ञात करें। **(2016A)**



हल : $\angle DOC + \angle COB = 180°$

$\therefore \quad \angle DOC = 180° - \angle COB = 180° - 125° = 55°$

ΔDOC में,

$$\angle DOC + \angle DCO + \angle CDO = 180°$$

$\therefore \quad \angle DCO = 180° - (\angle DOC + \angle CDO)$

$$= 180° - (70° + 55°) = 180° - 125° = 55°$$

$\therefore \quad \angle DOC = \angle DCO = 55°$ उत्तर।

प्रश्न 27. ΔABC में P और Q क्रमशः AB तथा AC पर दो बिन्दु इस प्रकार हो कि $PQ \parallel BC$ और $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$ हो, तो $\frac{AQ}{QC}$ का मान ज्ञात करें।

(2012C, M. Q., Set–IV : 2016)

हल : $\because PQ \parallel BC$

$\therefore \quad \frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{PB}$ (थेल्स प्रमेय से)

या, $\frac{AQ}{QC} = \frac{2}{3}$ उत्तर।

प्रश्न 28. यदि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ और क्षेत्रफल (ΔABC) : क्षेत्रफल $(\Delta PQR) = 121 : 169$ तो $BC : QR$ का मान बताएँ। **(2016C)**

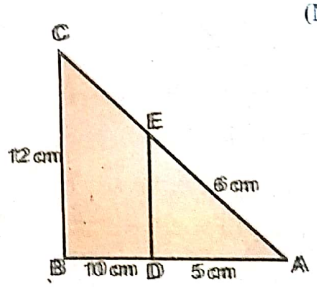
हल : $\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \frac{BC^2}{QR^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{121}{169} = \frac{BC^2}{QR^2} \qquad \therefore \quad \frac{BC}{QR} = \sqrt{\frac{121}{169}} = \frac{11}{13}$$

$\Rightarrow \quad BC : QR = 11 : 13.$ उत्तर।

प्रश्न 29. दिये गये आकृति में $AD = 5$ cm, $AE = 6$ cm, $BC = 12$ cm तथा $DB = 10$ cm हो तो EC और DE का मान निकालें।

(M. Q., Set–I : 2015)



हल : दिया है, ΔABC और ΔADE समरूप हैं, और माना $CE = x$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \qquad \Rightarrow \quad \frac{15}{5} = \frac{x+6}{6}$$

$$\Rightarrow \quad 18 = x + 6 \qquad \Rightarrow \quad 18 - 6 = x$$

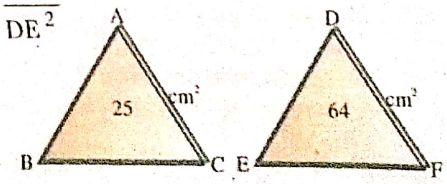
$\therefore \quad EC = 12$ cm तथा $DE = \frac{12}{2} = 6$ cm. उत्तर।

प्रश्न 30. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात 25 : 64 है; तो उनके भुजा का अनुपात निकालें। **(M. Q., Set–IV : 2015)**

हल : समरूप त्रिभुज के क्षेत्रफलों का अनुपात त्रिभुजों की भुजाओं के वर्गों के अनुपात

$$\therefore \quad \frac{ar\,\Delta(ABC)}{ar\,\Delta(DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{25}{64} = \frac{AB^2}{DE^2}$$



$$\therefore \quad \frac{AB}{DE} = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8} = 5:8$$ उत्तर।

प्रश्न 31. एक समबाहु त्रिभुज की परिमिति 30 cm है इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (2017A)

हल : समबाहु Δ की भुजा $= \frac{\text{परिमिति}}{3} = \frac{30}{3} = 10$ cm.

समबाहु Δ का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}(\text{भुजा})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(10)^2$

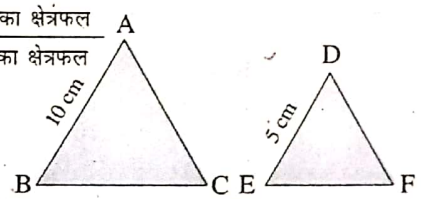
$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 10 \times 10 = 25\sqrt{3}$ cm². उत्तर।

प्रश्न 32. समबाहु त्रिभुज ΔABC की एक भुजा 10 cm तथा समबाहु ΔDEF की एक भुजा 5 cm है। ΔABC तथा ΔDEF के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करें। (2017A)

हल : $\frac{\text{समबाहु } \Delta \text{ ABC का क्षेत्रफल}}{\text{समबाहु } \Delta \text{ DEF का क्षेत्रफल}}$

$= \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{(10)^2}{(5)^2}$

$= \frac{100}{25} = 4:1$. उत्तर।



प्रश्न 33. ΔABC की भुजाओं BC, CA और AB के क्रमशः D, E, F मध्य बिन्दु हैं, तो $\frac{ar(\Delta DEF)}{ar(\Delta ABC)}$ को ज्ञात करें। (M. Q., Set–I : 2015, 2015C)

हल : चूँकि D और E क्रमशः BC और AC का मध्य बिन्दु है।

∴ DE ∥ AB और DE ∥ FA ... (i)

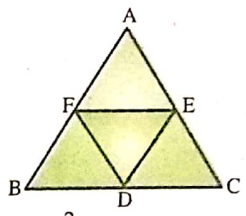
इसी प्रकार D, F क्रमशः BC और AB का मध्य बिन्दु है।

∴ DF ∥ AC और DF ∥ AE ... (ii)

(i) और (ii) से,

चूँकि AFDE और BDEF एक स० च० है।

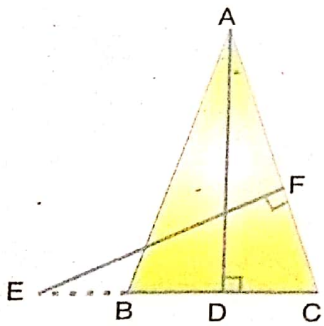
∴ ∠EDF = ∠A और ∠DEF = ∠B



∴ $\Delta DEF \sim \Delta ABC = \frac{\text{area}(\Delta DEF)}{\text{area}(\Delta ABC)} = \frac{DB^2}{AB^2}$

$= \frac{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}{AB^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 1:4$ उत्तर।

प्रश्न 34. आकृति में, AB = AC वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढ़ाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिंदु है। यदि AD ⊥ BC और EF ⊥ AC है, तो सिद्ध कीजिए कि ΔABD ~ ΔECF है।



हल : दिया है : AB = AC वाले एक समद्विबाहु ΔABC की बढ़ाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिंदु है। AD ⊥ BC और EF ⊥ AC हैं।

सिद्ध करना है : ΔABD ~ ΔECF

उपपत्ति : ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है। (दिया है)

AB = AC (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

∴ ∠B = ∠C

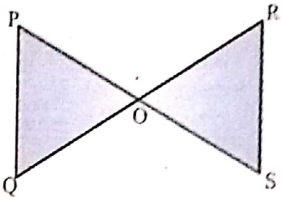
ΔABD और ΔECF में,

∠ABD = ∠ECF (ऊपर प्रमाणित)

∠ADB = ∠EFC (प्रत्येक 90°)

∴ ΔABD ~ ΔECF Proved. [AA समरूपता]

प्रश्न 35. आकृति में यदि PQ ∥ RS तो सिद्ध करें कि ΔPOQ ~ ΔSOR. (M. Q., Set–III : 2015)



हल : आकृति में,

∵ PQ ∥ RS

∴ ∠OPQ = ∠OSR एवं ∠OQP = ∠ORS

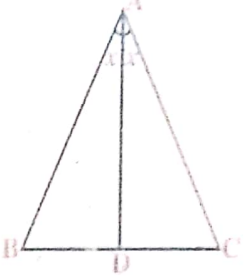
∴ ΔPOQ ~ ΔROS (AA) Proved.

प्रश्न 36. यदि किसी त्रिभुज में एक कोण का समद्विभाजक सम्मुख भुजा को समद्विभाजित करता है, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु है। (M. Q., Set–V : 2011, M. Q. Set–IV : 2015)

हल : दिया है : ΔABC में, AD, ∠A का समद्विभाजक है तथा BD = DC

सिद्ध करना है :

ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है अर्थात् AB = AC



उपपत्ति : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

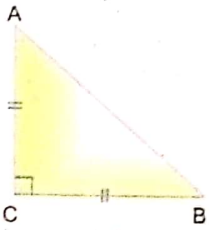
{AD, ∠A का समद्विभाजक है}

परन्तु BD = DC

∴ $\frac{AB}{AC} = 1$ या AB = AC यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 37. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = 2AC^2$ है। (2011A, M. Q., Set–V : 2015, 2015A, 2017A)

हल : दिया है : ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है।



सिद्ध करना है : $AB^2 = 2AC^2$.

उपपत्ति : ΔACB में,

∠C = 90°, AC = BC (दिया है)

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ [पाइथागोरस प्रमेय से]

$= AC^2 + AC^2$ [BC = AC]

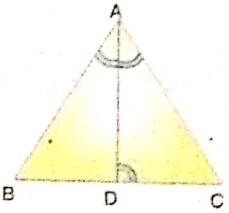
$AB^2 = 2AC^2$ Proved.

प्रश्न 38. एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि ∠ADC = ∠BAC तो दिखाइए कि $CA^2 = CB \cdot CD$ है। (2011A, M. Q., Set–I : 2016, 2016A)

हल : सिद्ध करना है :

$AC^2 = BC \times CD$

उपपत्ति :



ΔACB और ΔDCA में

∠BAC = ∠ADC (दिया है)

∠ACB = ∠ACD (उभयनिष्ठ)

∴ Δ ABC ~ ΔADC

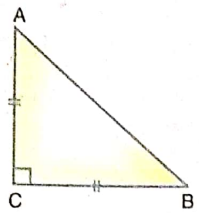
(कोण-कोण समरूपता)

∴ $\frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$

$\Rightarrow AC^2 = BC \times CD$, यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 39. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AC = BC है। यदि $AB^2 = 2AC^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है।
(2014A, M. Q., Set–IV : 2016)

हल : दिया है : ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजा AC = BC है।
$AB^2 = 2AC^2$



सिद्ध करना है : ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।

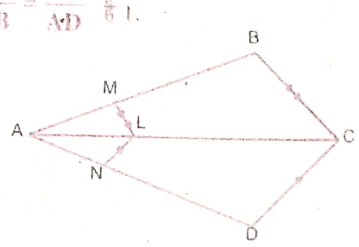
उपपत्ति : $AB^2 = 2AC^2$ (दिया है)

$AB^2 = AC^2 + AC^2$

या, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ [AC = BC]

∴ पाइथागोरस प्रमेय के विलोम से,
ΔABC समकोण त्रिभुज है। **Proved.**

प्रश्न 40. आकृति में यदि LM ∥ CB और LN ∥ CD हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ है।



हल : ΔABC में,
ML ∥ BC (दिया है)

∴ $\frac{AM}{MB} = \frac{AL}{LC}$ ... (1) (आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से)

पुनः ΔACD में,
LN ∥ CD (दिया है)

∴ $\frac{AN}{ND} = \frac{AL}{LC}$ ... (2)
(आधारभूत आनुपातिक प्रमेय से)

समीकरण (1) और (2) से,

$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{ND}$

या, $\frac{MB}{AM} + 1 = \frac{ND}{AN} + 1$

या, $\frac{AB}{AM} = \frac{AD}{AN}$

या, $\frac{MB}{AM} = \frac{ND}{AN}$

या, $\frac{MB + AM}{AM} = \frac{ND + AN}{AN}$

अतः $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ **Proved.**

प्रश्न 41. ΔABC एक समबाहु Δ है जिसकी प्रत्येक भुजा a cm है, तो सिद्ध करें कि त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ होगी।
(M. Q., Set–II : 2015, 2015A)

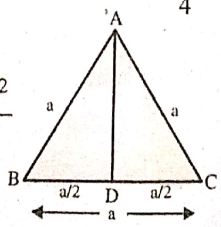
हल : ABC एक समबाहु Δ है तो सिद्ध करना है कि $\text{ar}\,\Delta(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

AD ⊥ BC खींचा, ΔABD में

$AD^2 = AB^2 - BD^2$

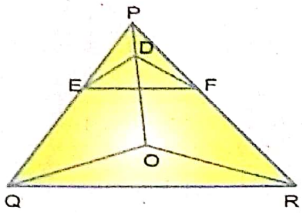
$= a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

∴ $AD = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



∴ समबाहु Δ ABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. **Proved.**

प्रश्न 42. आकृति में DE ∥ OQ और DF ∥ OR है। दर्शाइए कि EF ∥ QR है।

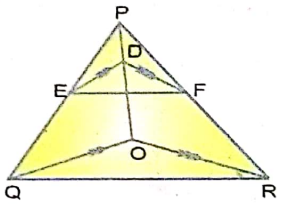


हल : दिया है : ΔPQR में,
DE ∥ OQ और DF ∥ OR.

सिद्ध करना है : EF ∥ QR.

उपपत्ति : ΔPQO में,
ED ∥ QO (दिया है)

∴ $\frac{PD}{DO} = \frac{PE}{EQ}$ ...(1)



[आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय से]

पुनः ΔPOR में,
DF ∥ OR (दिया है)

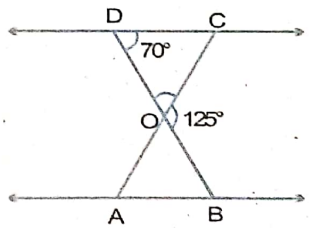
∴ $\frac{PD}{DO} = \frac{PF}{FR}$. ...(2)
[आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय से]

समीकरण (1) और (2) से,

$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$.

ΔPQR में, आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के विलोम से,
EF ∥ QR. **Proved.**

प्रश्न 43. आकृति में, ΔODC ~ ΔOBA, ∠BOC = 125° और ∠CDO = 70° है। ∠DOC, ∠DCO और ∠OAB ज्ञात कीजिए।
(M. Q., Set–II : 2016)



हल : ∠BOC = 125°, ∠CDO = 70°

∵ DOB एक सरल रेखा है।

∴ ∠DOC + ∠COB = 180°

∠DOC + 125° = 180°

∠DOC = 180 – 125 = 55°

∠DOC = ∠AOB = 55° [शीर्षाभिमुख कोण]

∵ ΔODC ~ ΔOBA (दिया है)

∴ ∠D = ∠B = 70°

ΔDOC में,

∠D + ∠O + ∠C = 180° 70° + 55° + ∠C = 180°

∠C = 180° – 70° – 55° ∠C = 55°

∠C = ∠A = 55° अतः ∠DOC = 55°

∠DCO = 55° ∴ ∠OAB = 55° उत्तर।

प्रश्न 44. एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा a है। उसके प्रत्येक शीर्ष लंब की लंबाई ज्ञात कीजिए। (2015A)

अथवा, समबाहु ΔABC की प्रत्येक भुजा a इकाई है, तो सिद्ध करें कि त्रिभुज का शीर्ष लम्ब $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ होगा। (2017A)

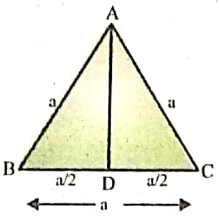
हल : ΔABC में ;

$AB = BC = CA = a$

तथा $AD \perp BC$

$\therefore \quad AD = \sqrt{(a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}}$

$= \sqrt{3a^2/4} = \sqrt{3}a/2.$



प्रश्न 45. एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई आधार से 7 सेमी० कम है। यदि कर्ण 13 सेमी० का हो तो अन्य दो भुजाओं का मान ज्ञात करें। (2017A)

हल : माना कि आधार = x cm

तब, प्रश्न से, ऊँचाई = (x – 7)

कर्ण = 13 cm

अत: पाइथागोरस सूत्र से,

$\because \quad (\text{कर्ण})^2 = (\text{ऊँचाई})^2 + (\text{आधार})^2$

$\Rightarrow \quad (13)^2 = (x-7)^2 + x^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 14x + 49 + x^2 - 169 = 0$

$\Rightarrow \quad 2x^2 - 14x - 120 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 7x - 60 = 0$

अत: अभीष्ट समीकरण $x^2 - 7x - 60 = 0$ है।

हल करने पर,

$x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$

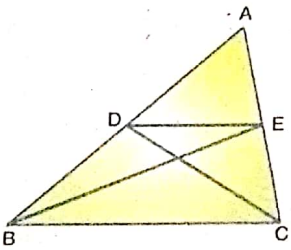
$\Rightarrow \quad x(x-12) + 5(x-12) = 0$

$\Rightarrow \quad (x+5)(x-12) = 0$

चूँकि $x = -5$ संभव नहीं है। अत: $x = 12$

अर्थात् आधार = 12 cm., ऊँचाई = 12 – 7 = 5 cm. उत्तर।

प्रश्न 46. आकृति में, यदि $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ है, तो दर्शाइए कि $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ है।



दिया है : $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ है।

सिद्ध करना है : $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

उपपत्ति : $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ (दिया है)

$AB = AC$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

और $AE = AD$

$\frac{AB}{AC} = 1 \quad \ldots (1)$

$\frac{AE}{AD} = 1 \quad \ldots (2)$

समीकरण (1) और (2) से, $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$

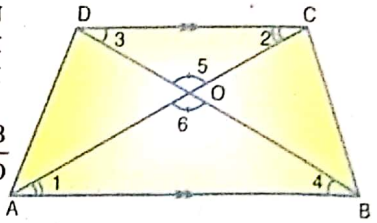
ΔADE और ΔABC में, $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore \quad \Delta ADE \sim \Delta ABC$ [SAS समरूपता कटौती से] **Proved.**

प्रश्न 47. समलंब ABCD, जिसमें AB || DC है, विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए, दर्शाइए कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ है। (2012A, 2013A)

हल : दिया है : समलंब चतुर्भुज ABCD जिसमें AB || CD है और विकर्ण AC तथा BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं।



सिद्ध करना है : $\frac{AO}{OC} = \frac{OB}{OD}$

उपपत्ति : AB || DC

ΔDOC और ΔBOA में,

$\angle 1 = \angle 2$ (एकांतर कोण)

$\angle 5 = \angle 6$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle 3 = \angle 4$ (एकांतर कोण)

$\therefore \quad \Delta DOC \sim \Delta BOA$ [AAA समरूपता कसौटी]

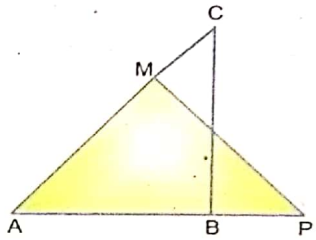
$\therefore \quad \frac{DO}{BO} = \frac{OC}{OA}$ [यदि दो त्रिभुज समरूप हों, तो संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।]

$\Rightarrow \quad \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ **Proved.**

प्रश्न 48. आकृति में, ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज हैं, जिनके कोण B और M समकोण हैं। सिद्ध कीजिए कि :

(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$.



हल : दिया है : ΔABC और ΔAMP दो समकोण त्रिभुज हैं, जिनके कोण B और M समकोण हैं।

सिद्ध करना है : (i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$ (ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

उपपत्ति : ΔABC और ΔAMP में,

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

$\angle B = \angle M$ (प्रत्येक 90°)

$\therefore \quad \Delta ABC \sim \Delta AMP$ (AA समरूपता)

$\therefore \quad \frac{AC}{AP} = \frac{BC}{MP}$ [यदि दो त्रिभुज समरूप हों, तो संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं]

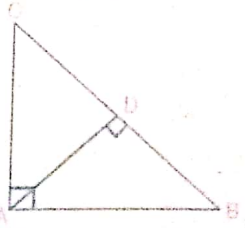
अर्थात् $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$ **Proved.**

प्रश्न 49. त्रिभुज ABC में, $\angle A = 90°$ है। यदि $AD \perp BC$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ है।

(M. Q., Set–V : 2011, 2014A)

हल : सिद्ध करना है :

$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$



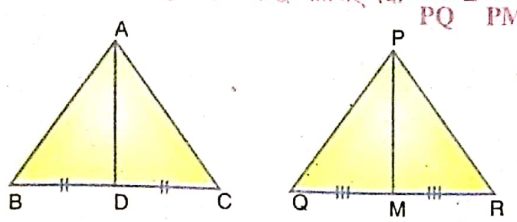
उपपत्ति : $AD^2 = AC^2 - CD^2$, समकोण ΔADC में

$AD^2 = AB^2 - DB^2$, समकोण ΔBDA में

$\therefore \quad AB^2 - DB^2 = AC^2 - CD^2$

या, $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$. **Proved.**

प्रश्न 50. AD और PM त्रिभुजों ABC और PQR की क्रमशः माध्यिकाएँ हैं, जबकि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ है।



हल : दिया है : ΔABC और ΔPQR की AD और PM माध्यिकाएँ हैं तथा $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है।

सिद्ध करना है : $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$

उपपत्ति : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (दिया है)

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ {यदि दो त्रिभुज समरूप हैं तो उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।}

$\angle A = \angle P$ {यदि दो त्रिभुजें समरूप हैं, तो उनके संगत कोण बराबर होते हैं।}

$\angle B = \angle Q$

$\angle C = \angle R$

D, BC का मध्य बिंदु है।

$\therefore BD = DC = \frac{1}{2}BC$ ... (1)

M, QR का मध्य बिंदु है।

$\therefore QM = MR = \frac{1}{2}QR$ ... (2)

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$

$\frac{AB}{PQ} = \frac{2BD}{2QM}$ [समीकरण (1) और (2) से]

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM}$

$\angle ABD = \angle PQM$ (दिया है)

$\Delta ABD \sim \Delta PQM$ (SAS समरूपता कसौटी से)

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ **Proved.** {यदि दो त्रिभुज समरूप हैं तो उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।}

प्रश्न 51. किसी समबाहु त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि उसकी एक भुजा के वर्ग का तिगुना उसके एक शीर्षलंब के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है। (M. Q., Set-II : 2016)

हल : दिया है : ΔABC एक समबाहु Δ है जिसमें $AB = BC = AC$

$AD \perp BC$

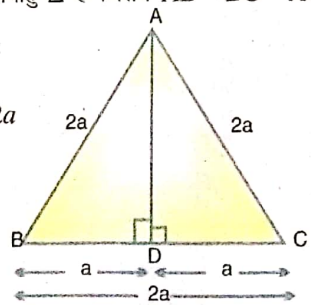
सिद्ध करना है : $3AB^2 = 4AD^2$

उपपत्ति : ΔABC में,

मान लीजिए $AB = BC = AC = 2a$

$AD \perp BC$

$\therefore BD = DC = BC = a$



समकोण त्रिभुज ABD में,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

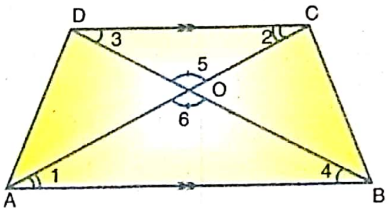
$(2a)^2 = AD^2 + (a)^2$; $4a^2 = AD^2 + a^2$;

$4a^2 - a^2 = AD^2$; $AD^2 = 3a^2 = 3\left[\frac{AB}{2}\right]^2$

$AD^2 = 3\frac{AB^2}{4}$; $3AB^2 = 4AD^2$. **Proved.**

प्रश्न 52. एक समलंब ABCD में $AB \parallel DC$ है, इसके विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $AB = 2CD$ हो, तो त्रिभुजों AOB और COD के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : ABCD एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें $AB \parallel DC$ है, इसके विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। $AB = 2CD$ है।



ΔAOB और ΔCOD में,

$\angle 1 = \angle 2$ (एकांतर कोण)

$\angle 3 = \angle 4$ (एकांतर कोण)

$\angle 5 = \angle 6$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore \Delta AOB \sim \Delta COD$

$\frac{\text{क्षे. } (\Delta AOB)}{\text{क्षे. } (\Delta COD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$ {यदि दो त्रिभुज समरूप हों, तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के अनुपात का वर्ग होता है।}

$= \frac{(2CD)^2}{CD^2} = \frac{4CD^2}{CD^2} = \frac{4}{1}$

$\therefore$ वांछित क्षे॰ ΔAOB और क्षे॰ ΔCOD का अनुपात $= 4 : 1$. **Proved.**

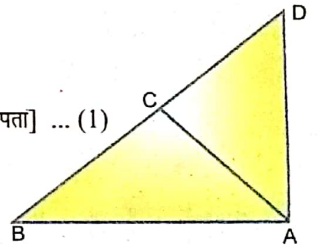
प्रश्न 53. ABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है तथा $AC \perp BD$ है, तो दर्शाइए कि $AB^2 = BC \cdot BD$. (2013A)

हल : ΔDAB और ΔDCA में,

$\angle D = \angle D$ (उभयनिष्ठ)

$\angle A = \angle C$ (प्रत्येक 90°)

$\therefore \Delta DAB \sim \Delta DCA$ [AA समरूपता] ... (1)



ΔDAB और ΔACB में,

$\angle B = \angle B$ (उभयनिष्ठ)

$\angle A = \angle C$ (प्रत्येक 90°)

$\therefore \Delta DAB \sim \Delta ACB$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से,

$\Delta DAB \sim \Delta ACB \sim \Delta DCA$.

$\therefore \Delta ACB \sim \Delta DAB$ (प्रमाणित)

$\therefore \frac{\text{क्षे॰}(\Delta ACB)}{\text{क्षे॰}(\Delta DAB)} = \frac{AB^2}{DB^2}$ [यदि दो त्रिभुज समरूप हैं, तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।]

$\frac{\frac{1}{2}BC \times AC}{\frac{1}{2}DB \times AC} = \frac{AB^2}{DB^2}$

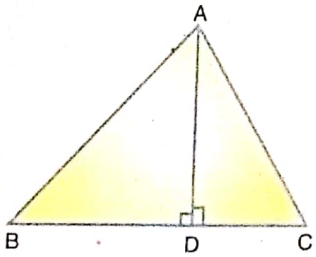
$\left[\because \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \text{ आधार} \times \text{शीर्षलम्ब}\right]$

$BC = \frac{AB^2}{BD}$ $\therefore \boxed{AB^2 = BC \times BD.}$ **Proved.**

प्रश्न 54. किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A से BC पर डाला गया लम्ब BC को बिंदु D पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि DB = 3CD है। (देखिए आकृति) सिद्ध कीजिए कि $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$ है।

हल : दिया है : ΔABC में, AD ⊥ BC और BD = 3CD है।

सिद्ध करना है : $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$.



उपपत्ति : समकोण त्रिभुज ADB और ADC में,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$; $AC^2 = AD^2 + DC^2$ [पाइथागोरस प्रमेय से]

$\therefore \quad AB^2 - AC^2 = BD^2 - DC^2 = 9CD^2 - CD^2 \quad [\because BD = 3CD]$

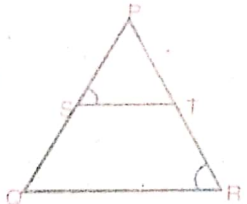
$$= 8CD^2 = 8\left(\frac{BC}{4}\right)^2 \qquad \left[\begin{array}{l}\because\ BC = BD + CD \\ \qquad = 3CD + CD \\ \qquad = 4CD \\ \therefore\ CD = \frac{1}{4}BC\end{array}\right]$$

$$\therefore \quad AB^2 - AC^2 = \frac{BC^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 2(AB^2 - AC^2) = BC^2$$

$\Rightarrow \quad 2AB^2 - 2AC^2 = BC^2 \quad \therefore \quad 2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$. Proved.

प्रश्न 55. दी गई आकृति में $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ है तथा ∠PST = ∠PRQ है तो सिद्ध करें कि ΔPQR एक समद्विबाहु Δ है।

(M. Q., Set–I : 2011)



हल : $\because \quad \frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ (दिया है)

$\therefore \quad ST \parallel QR \quad \Rightarrow \quad \angle PST = \angle PQR$

परन्तु ∠PST = ∠PRQ (दिया गया है)

$\therefore \quad \angle PQR = \angle PRQ$

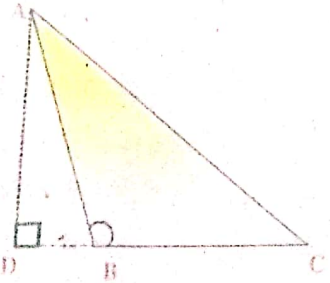
$\therefore \quad PQ = PR$ (समान कोण की सम्मुख भुजा समान होती है)

अत: PQR एक समद्विबाहु Δ है।

प्रश्न 56. यदि अधिककोण त्रिभुज में ∠ABC > 90° और AD, CB के बढ़ाये हुए भाग पर लम्ब हो तो सिद्ध करें कि $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$.

(M. Q., Set–II : 2011)

हल :



सिद्ध करना है : $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$

Δ ADC एक समकोण त्रिभुज है जिसका ∠D समकोण है

$\therefore \quad AC^2 = AD^2 + DC^2$

$\Rightarrow \quad AC^2 = AD^2 + (BD + BC)^2 = AD^2 + DB^2 + BC^2 + 2DB.BC$...(1)

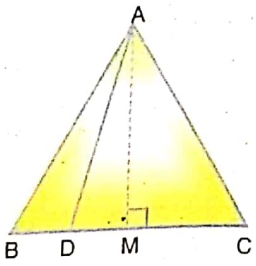
$\{\because AB^2 = AD^2 + DB^2\}$ ...(2)

$\therefore \quad AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$ Proved.

प्रश्न 57. किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार स्थित है कि $BD = \frac{1}{3}BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $9AD^2 = 7AB^2$ है।

हल : दिया है : समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार स्थित है कि

$$BD = \frac{1}{3}BC.$$



सिद्ध करना है : $9AD^2 = 7AB^2$.

रचना : AM ⊥ BC.

उपपत्ति : ΔAMB ≅ ΔAMC [R.H.S. नियम से क्योंकि AM = AM और AB = AC]

$\therefore \quad BM = MC = \frac{1}{2}BC \qquad$ पुन: $BD = \frac{1}{3}BC$

और $DC = \frac{2}{3}BC \qquad (\because$ BC, D पर तीन भागों में विभाजित है)

अब ΔADC में, ∠C न्यून कोण है।

$\therefore \quad AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2DC \times MC$

$$= AC^2 + \left(\frac{2}{3}BC\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3}BC\right)\frac{1}{2}BC$$

$$\left[\because DC = \frac{2}{3}BC \text{ और } MC \quad \frac{1}{2}BC\right]$$

$$= AB^2 + \frac{4}{9}AB^2 - \frac{2}{3}AB^2 \qquad [\because AC = BC = AB]$$

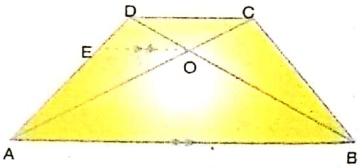
$$= \left(1 + \frac{4}{9} - \frac{2}{3}\right)AB^2 = \left(\frac{9+4-6}{9}\right)AB^2 = \frac{7}{9}AB^2$$

$\therefore \quad AD^2 = \frac{7}{9}AB^2 \quad \Rightarrow 9AD^2 = 7AB^2$ Proved.

प्रश्न 58. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है। दर्शाइए कि ABCD एक समलंब है।

(M. Q., Set–III : 2011)

हल : दिया है : चतुर्भुज ABCD में विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है।



सिद्ध करना है : चतुर्भुज ABCD एक समलंब चतुर्भुज है।

रचना : O से रेखा EO ∥ AB खींचिए, जो AD को E पर मिलती है।

उपपत्ति : ΔDAB में,

$EO \parallel AB \qquad \therefore \quad \frac{DE}{EA} = \frac{DO}{OB}$ ...(1)

[आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के प्रयोग से]

परंतु $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ (दिया है)

या, $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO} \qquad$ या; $\frac{CO}{AO} = \frac{DO}{BO}$

$\Rightarrow \quad \frac{DO}{OB} = \frac{CO}{AO}$ ...(2)

समीकरण (1) और (2) से, $\frac{DE}{EA} = \frac{CO}{AO}$

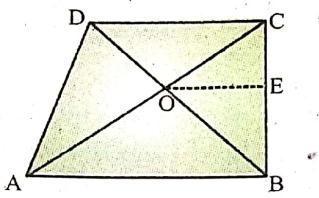
$\therefore$ आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के प्रयोग से, EO ∥ DC

साथ ही, EO ∥ AB $\quad \Rightarrow \quad$ AB ∥ DC

$\therefore$ चतुर्भुज ABCD एक समलंब चतुर्भुज है, जिसमें AB ∥ CD. Proved.

प्रश्न 59. सिद्ध करें कि समलम्ब चतुर्भुज के दोनों विकर्ण एक-दूसरे को समानुपाती खण्डों में विभाजित करते हैं। (M. Q., Set–II : 2011)

हल : समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण AC तथा BD एक-दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।



सिद्ध करना है कि $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$

O से $OE \parallel AB$ खींचा जो BC को बिन्दु E पर मिलती है।

ΔCAB में, $OE \parallel AB$

$\therefore \quad \frac{AO}{OC} = \frac{BE}{EC}$ ...(1) {आधारभूत आनुपातिक प्रमेय}

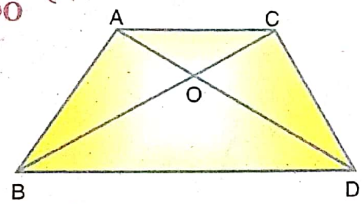
ΔBCD में, $OE \parallel DC$

$\therefore \quad \frac{BO}{OD} = \frac{BE}{EC}$ ...(2)

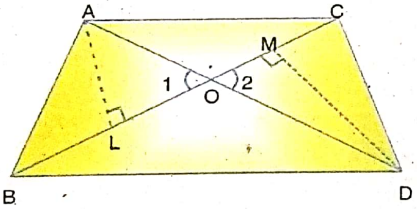
अतः (1) और (2) से,

$\frac{AO}{OC} \quad \frac{BO}{OD}$. **Proved.**

प्रश्न 60. आकृति में एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC और DBC बने हुए हैं। यदि AD, BC को O पर प्रतिच्छेद करें, तो दर्शाइए कि $\frac{\text{क्षे.}(\Delta ABC)}{\text{क्षे.}(\Delta DBC)} = \frac{AO}{DO}$ है।



हल : दिया है : ΔABC और ΔDBC एक ही आधार BC पर बने हुए हैं। AD, BC को O पर प्रतिच्छेद करता है।



सिद्ध करना है : $\frac{\text{क्षे॰}(\Delta ABC)}{\text{क्षे॰}(\Delta DBC)} = \frac{AO}{DO}$

रचना : $AL \perp BC$, $DM \perp BC$ खींचिए।

उपपत्ति : ΔALO और ΔDMO में,

$\angle 1 = \angle 2$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle L = \angle M$ (प्रत्येक 90°)

$\therefore \quad \Delta ALO \sim \Delta DMO$ [AA समरूपता कसौटी]

$\therefore \quad \frac{AL}{DM} = \frac{AO}{DO}$ {यदि दो त्रिभुज समरूप हों, तो संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।}

$$\frac{\text{क्षे॰}(\Delta ABC)}{\text{क्षे॰}(\Delta DBC)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AL}{\frac{1}{2} \times BC \times DM}$$

$$\frac{\text{क्षे॰}(\Delta ABC)}{\text{क्षे॰}(\Delta DBC)} = \frac{AL}{DM}$$

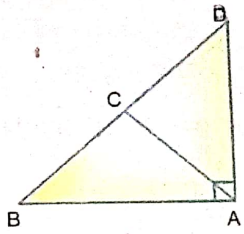
$$\frac{\text{क्षे॰}(\Delta ABC)}{\text{क्षे॰}(\Delta DBC)} = \frac{AO}{DO} \left[\frac{AL}{DM} = \frac{AO}{DO}\right]$$ **Proved.**

प्रश्न 61. आकृति में, ABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है तथा $AC \perp BD$ है। दर्शाइए कि

(i) $AB^2 = BC.BD$

(ii) $AC^2 = BC.DC$

(iii) $AD^2 = BD.CD$.



हल : ΔDAB और ΔDCA में,

$\angle D = \angle D$ (उभयनिष्ठ)

$\angle A = \angle C$ (प्रत्येक 90°)

$\therefore \quad \Delta DAB \sim \Delta DCA$ [AA समरूपता] ... (1)

ΔDAB और ΔACB में,

$\angle B = \angle B$ (उभयनिष्ठ)

$\angle A = \angle C$ (प्रत्येक 90°)

$\therefore \quad \Delta DAB \sim \Delta ACB$ ... (2)

(1) और (2) से,

$\Delta DAB \sim \Delta ACB \sim \Delta DCA$.

(i) $\Delta ACB \sim \Delta DAB$ (प्रमाणित)

$\therefore \quad \frac{\text{क्षे॰}(\Delta ACB)}{\text{क्षे॰}(\Delta DAB)} = \frac{AB^2}{DB^2}$ [यदि दो त्रिभुज समरूप हैं, तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।]

$$\frac{\frac{1}{2} BC \times AC}{\frac{1}{2} DB \times AC} = \frac{AB^2}{DB^2}$$

$\left[\because \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{शीर्षलम्ब}\right]$

$$BC = \frac{AB^2}{BD}$$

$\therefore \quad \boxed{AB^2 = BC \times BD.}$ **Proved.**

(ii) $\Delta ACB \sim \Delta DCA$ (प्रमाणित)

$\frac{\text{क्षे॰}(\Delta ACB)}{\text{क्षे॰}(\Delta DCA)} = \frac{AC^2}{DC^2}$ [यदि दो त्रिभुज समरूप हों, तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के अनुपात के वर्ग बराबर होता है।]

$$\frac{\frac{1}{2} BC \times AC}{\frac{1}{2} DC \times AC} = \frac{AC^2}{DC^2}$$

$\left[\because \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \text{ आधार} \times \text{शीर्षलम्ब}\right]$

$$BC = \frac{AC^2}{DC}$$

$\therefore \quad \boxed{AC^2 = BC \times DC.}$ **Proved.**

(iii) $\Delta DAB \sim \Delta DCA$ (प्रमाणित)

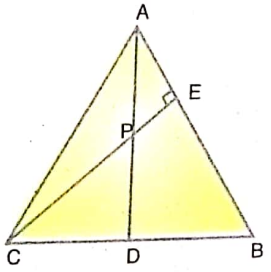
$\frac{\text{क्षे॰}(\Delta DAB)}{\text{क्षे॰}(\Delta DCA)} = \frac{DA^2}{DB^2}$ [यदि दो त्रिभुज समरूप हों, तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात संगत भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर होता है।]

$$\frac{\frac{1}{2} CD \times AC}{\frac{1}{2} BD \times AC} = \frac{AD^2}{BD^2}; \qquad CD = \frac{AD^2}{BD}$$

$\therefore \quad \boxed{AD^2 = BD \times CD.}$ **Proved.**

प्रश्न 62. आकृति में, ΔABC के शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि :

(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$
(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$
(iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$
(iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$.



हल : दिया है : ΔABC में,
$AD \perp BC$ और $CE \perp AB$

सिद्ध करना है : (i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$
(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$
(iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$
(iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

उपपत्ति : (i) ΔAEP और ΔCDP में,
$\angle E = \angle D$ (प्रत्येक 90°)
$\angle APE = \angle CPD$ (शीर्षाभिमुख कोण)
$\therefore \Delta AEP \sim \Delta CDP$ [AA समरूपता कसौटी]

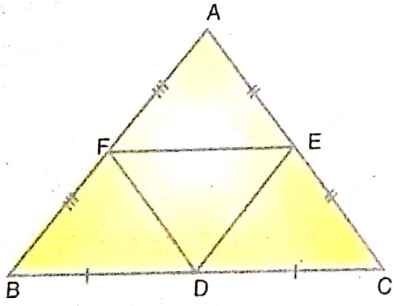
(ii) ΔABD और ΔCBE में,
$\angle D = \angle E$ (प्रत्येक 90°)
$\angle B = \angle B$ (उभयनिष्ठ)
$\therefore \Delta ABD \sim \Delta CBE$ [AA समरूपता कसौटी]

(iii) ΔAEP और ΔADB में,
$\angle E = \angle D$ (प्रत्येक 90°)
$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)
$\therefore \Delta AEP \sim \Delta ADB$ [AA समरूपता कसौटी]

(iv) ΔPDC और ΔBEC में,
$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ)
$\angle D = \angle E$ (प्रत्येक 90°)
$\therefore \Delta PDC \sim \Delta BEC$ Proved. [AA समरूपता कसौटी]

प्रश्न 63. एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB, BC और CA के मध्य-बिंदु क्रमशः D, E और F हैं। ΔDEF और ΔABC के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल :



दिया है : एक ΔABC की भुजाएँ AB, BC और CA के मध्य-बिंदु क्रमशः D, E और F हैं।

अभीष्ट : क्षे० (ΔDEF) : क्षे० (ΔABC) ज्ञात करना।

उपपत्ति : ΔABC में,
F, AB का मध्य-बिंदु है।... (दिया है)
E, AC का मध्य-बिंदु है।.... (दिया है)
इसलिए मध्य-बिंदु प्रमेय से,

$$FE \parallel BC \text{ और } FE = \frac{1}{2} BC$$

$$\Rightarrow FE \parallel BD \text{ और } FE = BD \left[\because BD = \frac{1}{2} BC\right]$$

$\therefore$ BDEF एक समांतर चतुर्भुज है।
($\because$ सम्मुख भुजाएँ समांतर और समान हैं।)

त्रिभुज FBD और DEF में,
$FB = DE$ (||gm BDEF की सम्मुख भुजाएँ)
$FD = FD$ (उभयनिष्ठ)
$BD = FE$ (||gm BDEF की सम्मुख भुजाएँ)
$\therefore \Delta FBD \cong \Delta DEF$ (SSS सर्वांगसमता प्रयोग)

इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि
$\Delta AFE \cong \Delta DEF$ और $\Delta EDC \cong \Delta DEF$

यदि त्रिभुज सर्वांगसम हों, तो वे क्षेत्रफल में बराबर होती हैं।

$\therefore$ क्षे० (ΔFBD) = क्षे० (ΔDEF) ...(1)
क्षे० (ΔAFE) = क्षे० (ΔDEF) ...(2)
क्षे० (ΔEDC) = क्षे० (ΔDEF) ...(3)

अब क्षे० (ΔABC) = क्षे० (ΔFBD) + क्षे० (ΔDEF) + क्षे० (ΔAFE) + क्षे० (ΔEDC)
= क्षे० (ΔDEF) + क्षे० (ΔDEF) + क्षे० (ΔDEF) + क्षे० (ΔDEF)
[(1), (2) और (3) का प्रयोग करने पर]
= 4 क्षे० (ΔDEF)

$$\Rightarrow \text{क्षे० } (\Delta DEF) = \frac{1}{4} \text{ क्षे० } (\Delta ABC)$$

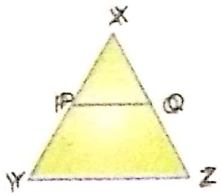
$$\Rightarrow \frac{\text{क्षे० } (\Delta DEF)}{\text{क्षे० } (\Delta ABC)} = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ क्षे० (ΔDEF) : क्षे० (ΔABC) = 1 : 4 Proved.

प्रश्न 64. यदि ΔXYZ का क्षेत्रफल 32 वर्ग सेमी, $\frac{XP}{PY} = \frac{XQ}{QZ} = 3$ तो चतुर्भुज YZPQ का क्षेत्रफल ज्ञात करें। (2011C)

हल : प्रश्नानुसार दिया हुआ है कि
ΔXYZ का क्षे० = 32 वर्ग सेमी

$$\frac{XP}{PY} = \frac{XQ}{QZ} = 3$$



अतः $PQ \parallel YZ$ है (थेल्स प्रमेय के विलोम से)
ΔXPQ तथा ΔXYZ में
$\angle X = \angle X$ (उभयनिष्ठ होने के कारण)
$\angle XPQ = \angle XYZ$ (संगत कोण)
$\therefore$ कोण - कोण समरूपता से, $\Delta XPQ \sim \Delta XYZ$

$$\therefore \frac{\Delta XPQ \text{ का क्षे०}}{XYZ \text{ का क्षे०}} = \frac{XP^2}{XY^2} \quad \text{(समरूप त्रिभुज के क्षे० का अनुपात से)}$$

$$= \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

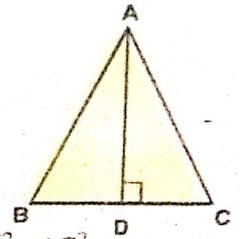
$$\therefore \Delta XPQ \text{ का क्षे०} = \frac{9}{16} \times \Delta XYZ \text{ का क्षे०} = \frac{9}{16} \times 32$$
= 18 वर्ग सेमी०

अतः चतुर्भुज YZQP का क्षे० = 32 – 18 = 14 वर्ग सेमी० उत्तर।

प्रश्न 65. यदि ΔABC में $AD \perp BC$ है, तो सिद्ध करें कि $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$. (2014C)

अथवा, $AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$. (M.Q., Set- V : 2016)

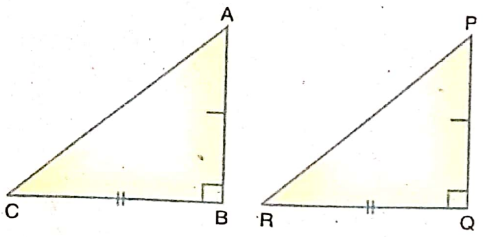
हल : समकोण ΔABD में,
$BD^2 = AB^2 - AD^2$ ...(i)
पुनः समकोण ΔADC में,
$CD^2 = AC^2 - AD^2$ ...(ii)
(i) में (ii) को घटाने पर,
$BD^2 - CD^2$
$= (AB^2 - AD^2) - (AC^2 - AD^2)$
$= AB^2 - AD^2 - AC^2 + AD^2 = AB^2 - AC^2$



या, $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$ Proved.

प्रश्न 66. सिद्ध कीजिए कि यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो, पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

हल : दिया गया है : ABC एक त्रिभुज जिसमें $AC^2 = AB^2 + BC^2$
सिद्ध करना है : $\angle B$ समकोण है।
रचना : ΔPQR बनाया जिसमें $\angle Q = 90°$
तथा $PQ = AB$ और $QR = BC$
उपपत्ति :



ΔPQR से,
$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (पाइथागोरस प्रमेय)
$\therefore PR^2 = AB^2 + BC^2$ (रचना से)
$AC^2 = AB^2 + BC^2$ $\therefore PR^2 = AC^2$
या, $AC = PR$
अब ΔABC तथा ΔPQR में,
$AB = PQ$; $BC = QR$
$AC = PR$ $\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$ .....(SSS)
$\therefore \angle B = \angle Q$; $\angle Q = 90°$
$\therefore \angle B = 90°$. Proved.

निर्देशांक ज्यामिति

प्रश्न 1. भुज या कोटि की परिभाषा दें। (M. Q., Set–I : 2011)

हल : भुज : किसी बिन्दु की y-अक्ष से दूरी उस बिन्दु का x-निर्देशांक या भुज कहलाता है।

कोटि : किसी बिन्दु की x-अक्ष से दूरी उस बिन्दु का y-निर्देशांक या कोटि कहलाता है।

प्रश्न 2. बिन्दु $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी ज्ञात करें। (2011A)

हल : $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

प्रश्न 3. उस त्रिभुज के क्षेत्रफल के लिए सूत्र लिखें जिसके शीर्षों के नियामक (x_1, y_1), (x_2, y_2) और (x_3, y_3) हैं। (M. Q., Set–II : 2011)

हल : $\frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$.

प्रश्न 4. बिन्दु $(5\cos\theta, 0)$ और $(0, 5\sin\theta)$ के बीच की दूरी क्या है ? (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : $d = \sqrt{(0 - 5\cos\theta)^2 + (5\sin\theta - 0)^2}$

$= \sqrt{25\cos^2\theta + 25\sin^2\theta} = \sqrt{25} = 5$

प्रश्न 5. बिन्दु ΔABC के शीर्ष A(4, 3), B(6, 5) और C(2, 4) हैं तो Δ के केन्द्रक का निर्देशांक क्या होगा ? (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : केन्द्रक $\left(\frac{4+6+2}{3}, \frac{3+5+4}{3}\right)$

या, $\frac{12}{3}, \frac{12}{3}$ या, (4, 4).

प्रश्न 6. बिन्दु (2, –2) और (–2, 2) को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करें। (M. Q., Set–II : 2011, 2011C)

हल : (0, 0)

संकेत : $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु

$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$\Rightarrow$ अभीष्ट मध्य बिन्दु $= \left(\frac{2-2}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = (0.0)$.

प्रश्न 7. किसी तल में दो बिन्दु C(4, 6) और D(6, 8) स्थित हैं, तो उनके बीच की दूरी निकालें। (M. Q., Set–III : 2011)

हल : $CD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-4)^2 + (8-6)^2}$

$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ मात्रक उत्तर।

प्रश्न 8. किसी तल में दो बिन्दु A(4, 6), B(6, 8) हैं, तो इन दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का मध्य बिन्दु का निर्देशांक क्या होगा ? (M. Q., Set–III : 2011)

हल : A (4, 6), B (6, 8) को मिलाने वाली रेखा का मध्य बिन्दु

$= \left(\frac{4+6}{2}, \frac{6+8}{2}\right) = (5, 7)$. उत्तर।

प्रश्न 9. सूत्र $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$ क्या कहलाता है ? (2011A)

हल : विभाजन सूत्र।

प्रश्न 10. दो बिन्दु P (2, 3) और Q (4, 2) के बीच की दूरी ज्ञात करें। (2011C)

हल : P = (2, 3), Q = (4, 2)

दूरी $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(4-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ इकाई उत्तर।

प्रश्न 11. मूल बिन्दु से P (6, – 6) की दूरी निकालें। (M.Q., Set–II : 2015)

हल : मूल बिन्दु से P बिन्दु की दूरी $= \sqrt{(6-0)^2 + (-6-0)^2}$

$= \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$

$= 6\sqrt{2}$ मात्रक उत्तर।

प्रश्न 12. बिन्दुओं (0, 0) और (36, 15) के बीच की दूरी ज्ञात करें। (2016A)

हल : दो बिन्दुओं के बीच की दूरी

$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(0-36)^2 + (0-15)^2}$

$= \sqrt{1296+225} = \sqrt{1521} = 39$ इकाई उत्तर।

प्रश्न 13. बिन्दुओं $(a\cos\theta, 0)$ तथा $(0, a\sin\theta)$ के बीच की दूरी निकालें। (2015A)

हल : बिन्दुओं $(a\cos\theta, 0)$ तथा $(0, a\sin\theta)$ के बीच की दूरी

$= \sqrt{(a\cos\theta)^2 - (0)^2 + (0)^2 - (a\sin\theta)^2}$

$\equiv \sqrt{a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}$

$= \sqrt{a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{a^2 \times 1} = a$ उत्तर।

प्रश्न 14. बिन्दु (4, 5) तथा (–3, 2) के बीच की दूरी ज्ञात करें। (2012A)

हल : दूरी सूत्र से,

$$\text{दूरी} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{\{4-(-3)\}^2 + (5-2)^2}$$

$$= \sqrt{(4+3)^2 + (3)^2} = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{49+9}$$

$$= \sqrt{58}$$ इकाई उत्तर।

प्रश्न 15. दो बिन्दुओं (1, 2) और (–3, 5) के बीच की दूरी ज्ञात करें। (M. Q., Set–II : 2011)

हल : दूरी $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$= \sqrt{(-3-1)^2 + (5-2)^2}$$

$$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$ मात्रक, उत्तर।

प्रश्न 16. y का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिंदु P(2, –3) और Q(10, y) के बीच की दूरी 10 मात्रक है। (M.Q., Set–V : 2011, 2015A, 2015C)

हल : P(2, –3) और Q(10, y) दिए गए बिंदु हैं।

इस तरह, PQ = 10 मात्रक

लेकिन, $PQ = \sqrt{(10-2)^2 + (y+3)^2}$

$\Rightarrow 10 = \sqrt{64 + y^2 + 6y + 9}$

$\Rightarrow 100 = 73 + y^2 + 6y$ [दोनों तरफ वर्ग करने पर]

$\Rightarrow y^2 + 6y - 27 = 0$

$\Rightarrow (y+9)(y-3) = 0$

$\Rightarrow y = -9$ या 3

इसलिए y का संभावित मान 3 या –9 होगा; उत्तर।

प्रश्न 17. बिंदु (2, 3) तथा (4, 1) के बीच की दूरियाँ ज्ञात कीजिए। (2011A, 2012C)

हल : मान लीजिए P(2, 3) और Q(4, 1) दिए गए बिंदु हैं।

यहाँ, $x_1 = 2, y_1 = 3$ और $x_2 = 4, y_2 = 1$

$$\therefore PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (1-3)^2}$$

$$= \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$; उत्तर।

प्रश्न 18. बिंदु (a, b) तथा (–a, –b) के बीच की दूरियाँ ज्ञात कीजिए। (M.Q., Set–I & V : 2015)

हल : मान लीजिए P(a, b) और Q(–a, –b) दिए गए बिंदु हैं।

यहाँ, $x_1 = a, y_1 = b$ और $x_2 = -a, y_2 = -b$

$$\therefore PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-a-a)^2 + (-b-b)^2}$$

$$= \sqrt{(-2a)^2 + (-2b)^2} = \sqrt{4a^2 + 4b^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$ उत्तर।

प्रश्न 19. x-अक्ष पर वह बिंदु ज्ञात कीजिए जो (2, –5) और (–2, 9) से समदूरस्थ हैं। (M.Q., Set–V : 2015, 2015A)

हल : चूँकि x-अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिंदु की कोटि 0 है।

इसलिए P(x, 0), x-अक्ष पर कोई एक बिंदु है।

चूँकि P(x, 0) बिंदु, A(2, –5) और B(–2, 9) समदूरस्थ है।

$\therefore PA = PB \Rightarrow PA^2 = PB^2$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (0+5)^2 = (x+2)^2 + (0-9)^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 25 = x^2 + 4x + 4 + 81$

$\Rightarrow -4x - 4x = 81 - 25 \Rightarrow -8x = 56$

$\Rightarrow x = \frac{56}{-8} = -7$

$\therefore$ x-अक्ष पर दिए गए बिंदु से समदूरस्थ बिंदु (–7, 0) है; उत्तर।

प्रश्न 20. y-अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (4, 0) और (6, 0) से समदूरस्थ है। (2014A)

हल : y-अक्ष पर किसी बिन्दु का निर्देशांक (0, y) होता है।

अत: मान लिया कि P (0, y) वह बिन्दु है जो बिन्दुओं A (4, 0) और B (6, 0) से समदूरस्थ है।

अर्थात् AP = BP; $AP^2 = BP^2$

$$(4-0)^2 + (0-y)^2 = (6-0)^2 + (0-y)^2$$

$$16 + y^2 = 36 + y^2$$

$$2y^2 = 52, \quad y^2 = \frac{52}{2} = 26 \quad \therefore \quad y = \sqrt{26}$$

अत: अभीष्ट बिन्दु $P\left(0, \sqrt{26}\right)$ है। उत्तर।

प्रश्न 21. x-अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो (5, 3) और (3, 5) से समदूरस्थ है। (2014A)

हल : x-अक्ष पर किसी बिन्दु का निर्देशांक (x, 0) होता है।

अत: मान लिया कि P (x, 0) वह बिन्दु है जो बिन्दुओं A (5, 3) और B (3, 5) से समदूरस्थ है।

अर्थात् AP = BP; $AP^2 = BP^2$

$$(5-x)^2 + (3-0)^2 = (3-x)^2 + (5-0)^2$$

$$25 + x^2 - 10x + 9 = 9 + x^2 - 6x + 25$$

$$-10x = -6x$$

या, $-10x + 6x = 0$ या, $-4x = 0$ $\therefore \quad x = \frac{0}{-4} = 0$

अत: अभीष्ट बिन्दु (0, 0) है। उत्तर।

प्रश्न 22. बिन्दु A और B के बीच की दूरी निकालें। यदि उनके निर्देशांक A(a, 0) और B(0, a) है? (M. Q., Set–I : 2016)

हल : (a, 0) A (0, a) B

AB दूरी = $\sqrt{(x - \text{नियामक का अन्तर})^2 + (y - \text{नियामक का अन्तर})^2}$

$$= \sqrt{(a-0)^2 + (0-a)^2} = \sqrt{a^2 + a^2}$$

$$= \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$$ इकाई उत्तर।

प्रश्न 23. बिन्दुओं (– 5, 7) और (– 1, 3) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। (2016A)

हल : दिया हुआ है कि $(x_1, y_1) = (-5, 7)$

और $(x_2, y_2) = (-1, 3)$

दो बिन्दुओं के बीच की दूरी $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$$= \sqrt{\{-5-(-1)\}^2 + (7-3)^2}$$

$$= \sqrt{(-5+1)^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$$= 4\sqrt{2}$$ इकाई उत्तर।

प्रश्न 24. बिन्दु (8, 10) और (6, 12) को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करें। (M. Q., Set–III : 2011)

हल : मध्य बिन्दु के निर्देशांक $= \left(\frac{8+6}{2}, \frac{10+12}{2}\right) = (7, 11)$ उत्तर।

प्रश्न 25. यदि A और B के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1) और (x_2, y_2) हो तो रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु का निर्देशांक निकालें। (M. Q., Set–III : 2016)

हल : अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक

$$= \left(\frac{x \text{ निर्देशांकों का योग}}{2}, \frac{y \text{ निर्देशांकों का योग}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \text{ उत्तर।}$$

प्रश्न 26. उस बिन्दु का निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (2, 3) और (3, –1) को मिलाने वाली रेखाखण्ड को 2 : 1 के अनुपात में अन्तर्विभाजित करता है। (M.Q., Set–II : 2011)

हल : (2, 3) और (3, –1) को 2 : 1

(x_1, y_1) और (x_2, y_2) को $m_1 : m_2$

अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक

$$= \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$= \left(\frac{2\times3 + 1\times2}{2+1}, \frac{2\times(-1) + 1\times3}{2+1}\right)$$

$$= \left(\frac{6+2}{3}, \frac{-2+3}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right). \text{ उत्तर।}$$

प्रश्न 27. बिन्दुओं (22, 20) और (0, 16) को मिलाने वाली रेखाखंड का मध्य बिन्दु निकालें। (M. Q. Set–III : 2015)

हल : माना कि बिंदु A(22, 20) और B(0, 16) के मध्य बिन्दु P(x, y) है।

A(22, 20) P (x, y) B (0, 16)

$$\therefore \quad x = \frac{22+0}{2} = \frac{22}{2} = 11\,; \quad y = \frac{20+16}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$\therefore$ P $(x, y) = (11, 18)$ उत्तर।

प्रश्न 28. दो बिन्दु P(2, –2) और Q(–2, 2) को मिलाने वाली रेखाखंड के मध्य बिन्दु निकालें। (M. Q. Set–IV : 2015)

हल : A(2, –2) P (x, y) B (–2, 2)

माना कि मध्य बिन्दु P का निर्देशांक (x, y) है

$$\therefore \quad x = \frac{2+(-2)}{2} = \frac{2-2}{2} = 0\,; \; y = \frac{-2+2}{2} = 0$$

$\therefore$ P $(x, y) = (0, 0)$ उत्तर।

प्रश्न 29. A और B के निर्देशांक क्रमशः (1, 4) और (5, 2) है, P का निर्देशांक निकालें यदि $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}$. (M. Q., Set–IV : 2016)

हल : $x_1 = 1, \quad y_1 = 4, \quad x_2 = 5, \quad y_2 = 2,$

$m_1 = 3$ तथा $m_2 = 4$

$$\therefore \quad x\text{-निर्देशांक} = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} = \frac{3\times5 + 4\times1}{3+4} = \frac{15+4}{7} = \frac{19}{7}$$

$$y\text{-निर्देशांक} = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} = \frac{3\times2 + 4\times4}{3+4} = \frac{6+16}{7} = \frac{22}{7}$$

अतः अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $= \left(\frac{19}{7}, \frac{22}{7}\right)$ उत्तर।

प्रश्न 30. एक त्रिभुज के शीर्ष के नियामक क्रमशः (5, 0), (3, 2) एवं (4, 7) हैं, तो त्रिभुज के केन्द्रक का नियामक ज्ञात करें। (2016A)

हल : $A = (5, 0); \quad B = (3, 2); \quad C = (4, 7)$

Δ के केन्द्रक का नियामक $(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right), \left(\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

$$= \left(\frac{5+3+4}{3}\right), \left(\frac{0+2+7}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{12}{3}\right), \left(\frac{9}{3}\right) = (4, 3). \text{ उत्तर।}$$

प्रश्न 31. उस त्रिभुज का केन्द्रक निकालें जिनके शीर्ष (3, –5), (–7, 4) तथा (10, –2) हैं। (M. Q. Set–I & IV : 2015; 2015A, 2017A)

हल : केन्द्रक $= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

$$= \left\{\frac{3+(-7)+10}{3}, \frac{-5+4+(-2)}{3}\right\}$$

$$= \left(\frac{3-7+10}{3}, \frac{-5+4-2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{6}{3}, \frac{-3}{3}\right) = (2, -1). \text{ उत्तर।}$$

प्रश्न 32. बिन्दु A (–5, 4) और बिन्दु B (7, –8) को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु का नियामक बतावें। (2017A)

हल : A (–5, 4) B (7, –8)

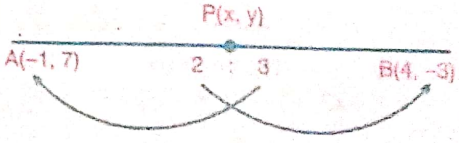
रेखा का मध्य बिन्दु का नियामक $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$$= \left\{\frac{-5+7}{2}, \frac{4+(-8)}{2}\right\}$$

$$= \left(\frac{2}{2}, \frac{-4}{2}\right) = (1, -2). \text{ उत्तर।}$$

प्रश्न 33. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिये जो बिन्दु (–1, 7) और (4, –3) को मिलाने वाले रेखाखंड को 2 : 3 के अनुपात में विभाजित करता है। (2017A)

हल : मान लिया कि P (x, y) वाँछित बिन्दु है।



तब $x = \frac{2\times4 + 3\times-1}{2+3} = \frac{8-3}{5} = 1$

$$y = \frac{2\times-3 + 3\times7}{2+3} = \frac{-6+21}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$\therefore$ P (x, y) = P(1, 3). उत्तर।

प्रश्न 34. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (2, 3), (–1, 0), (2, –4) हैं। (2013A, 2016C)

हल : मान लीजिए $A = (x_1, y_1) = (2, 3)$, $B = (x_2, y_2) = (-1, 0)$ और $C = (x_3, y_3) = (2, -4)$

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[2(0+4) + (-1)(-4-3) + 2(3-0)]$$

$$= \frac{1}{2}(8 + 7 + 6) = \frac{21}{2} \text{ वर्ग इकाई; उत्तर।}$$

प्रश्न 35. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (–5, –1), (3, –5), (5, 2) है। (M. Q., Set–III : 2011, 2011C, 2013C, M.Q., Set–V : 2016, 2016A)

हल : मान लीजिए $A = (x_1, y_1) = (-5, -1)$; $B = (x_2, y_2) = (3, -5)$ और $C = (x_3, y_3) = (5, 2)$

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[-5(-5-2) + 3(2+1) + 5(-1+5)]$$

$$= \frac{1}{2}(35 + 9 + 20) = \frac{1}{2} \times 64$$

$= 32$ वर्ग इकाई; उत्तर।

प्रश्न 36. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालें जिनके शीर्षों के नियामक क्रमशः (5, 2), (–5, –1) और (3, 5) हो। (M. Q., Set–II : 2011)

हल : सूत्र – त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$

$$\frac{1}{2}[5(-1-5) + (-5)(5-2) + 3\{2-(-1)\}]$$

$$= \frac{1}{2}[5\times(-6) - 5\times3 + 3\times1] = \frac{1}{2}[-30 - 15 + 3]$$

$$= \frac{1}{2}(-45+3) = \frac{1}{2}(-42) = -21$$

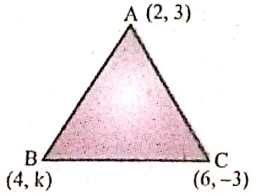
अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल = 21 वर्ग मात्रक; उत्तर।

प्रश्न 37. k का मान ज्ञात करें, यदि बिन्दु A (2, 3), B (4, k) तथा C (6, – 3) सरेख हैं। (2016A)

हल : $A = (2, 3)$, $x_1 = 2$, $y_1 = 3$

$B = (4, k)$, $x_2 = 4$, $y_2 = k$

$C = (6, -3)$, $x_3 = 6$, $y_3 = -3$



सरेखी के लिए—

ΔABC का क्षेत्रफल = 0

$$\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[2(k+3) + 4(-3-3) + 6(3-k)] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[2k + 6 + 4(-6) + 18 - 6k] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[2k + 6 - 24 + 18 - 6k] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[-4k] = 0 \qquad \therefore \quad k = 0; \text{ उत्तर।}$$

प्रश्न 38. यदि ABC के शीर्ष के नियामक क्रमशः (–5, 7), (–4, –5) और (4, 5) हों तो ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात करें। (M. Q., Set–I : 2011)

हल : $\text{ar}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$$\text{ar}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}[-5(-5-5) + (-4)(5-7) + 4(7+5)]$$

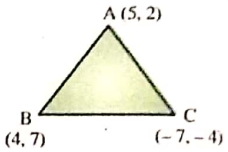
$$= \frac{1}{2}[50 + 8 + 48] = \frac{106}{2} = 53 \text{ वर्ग मात्रक; उत्तर।}$$

प्रश्न 39. बिन्दुओं A (5, 2), B(4, 7) और C (-7,-4) से बनने वाले ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात करें। (2017A)

हल : $A = (5, 2)$, $x_1 = 5$, $y_1 = 2$

$B = (4, 7)$, $x_2 = 4$, $y_2 = 7$

$C = (-7, -4)$, $x_3 = -7$, $y_3 = -4$



$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[5\{7-(-4)\} + 4(-4-2) + (-7)(2-7)]$$

$$= \frac{1}{2}[5(7+4) + 4\times-6 + (-7)\times(-5)]$$

$$= \frac{1}{2}(55 - 24 + 35) = \frac{1}{2}(90 - 24)$$

$$= \frac{1}{2}\times66 = 33 \text{ वर्ग इकाई। उत्तर।}$$

प्रश्न 40. a का मान निकालें यदि (a, 2) और (3, 4) की बीच की दूरी 8 है। (M.Q., Set–I : 2015)

हल : $(AB) = \sqrt{(3-a)^2 + (4-2)^2}$

$\Rightarrow 8 = \sqrt{(3-a)^2 + 2^2} \quad \Rightarrow 8^2 = (3-a)^2 + 4$

$\Rightarrow 64 - 4 = (3-a)^2 \quad \Rightarrow 60 = (3-a)^2$

$\therefore 3 - a = \sqrt{60} \quad \Rightarrow 3 \pm \sqrt{60} = a$

$\therefore a = 3 \pm \sqrt{60}$; उत्तर।

प्रश्न 41. दूरी सूत्र का प्रयोग कर दिखाइये कि बिन्दुएँ (1, 5), (2, 4) और (3, 3) सरेखी हैं। (2012A)

हल : माना $A = (1, 5)$, $B = (2, 4)$ और $C = (3, 3)$

अब $AB = \sqrt{(1-2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{2}$ इकाई

$BC = \sqrt{(2-3)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$ इकाई

$AC = \sqrt{(1-3)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{2}$ इकाई

AB, BC और AC में सबसे बड़ा AC है।

अब $AB + BC = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = AC$

अतः बिन्दुएँ A, B तथा C सरेखी हैं। उत्तर।

प्रश्न 42. दर्शाइए कि बिन्दु (1, – 1), (5, 2) और (9, 5) सरेखी हैं।

हल : माना $A = (1, -1)$, $B(5, 2)$ और $C(9, 5)$ दिए हुए बिन्दु हैं।

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$BC = \sqrt{(5-9)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

तथा $AC = \sqrt{(1-9)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{64+36} = 10$

स्पष्टतः $AC = AB + BC$.

अतः A, B, C सरेखी बिन्दु हैं। उत्तर।

प्रश्न 43. किसी तल में P और Q दो बिन्दु हैं जिनके निर्यामक क्रमशः (1, –3) और (4, 1) हैं तो PQ की लम्बाई ज्ञात करें।
(M. Q., Set–III : 2011)

हल : P(1, – 3), Q(4, 1)

$$PQ = \sqrt{(4-1)^2 + (1-(-3))^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ मात्रक}$$ उत्तर।

प्रश्न 44. दूरी सूत्र का प्रयोग कर दिखाइये कि बिन्दुएँ (1, 5), (2, 4) और (3, 3) संरेखी हैं।

हल : माना लिया कि A (1, 5), B(2, 4), C (3, 3)

$$\therefore \quad AB = \sqrt{(1-2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(2-3)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2},$$

$$AC = \sqrt{(1-3)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

स्पष्ट है कि $AB + BC = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\therefore \quad AB + BC = AC$

अतः तीनों बिन्दुएँ संरेखी है। उत्तर।

प्रश्न 45. यदि बिन्दु (3, k) तथा (k, 5) से बिन्दु (0, 2) की दूरियाँ समान हों, तो k का मान ज्ञात करें। (2015A)

हल : माना बिन्दुओं A और B के निर्देशांक क्रमशः (3, k) तथा (k, 5) हैं तथा बिन्दु P का निर्देशांक (0, 2) है।

प्रश्नानुसार,

दिया है $PA = PB$ ... (i)

अर्थात् $PA^2 = PB^2$

अब $PA^2 = (0-3)^2 + (2-k)^2$

तथा $PB^2 = (0-k)^2 + (2-5)^2$

समीकरण (i) में PA और PB का मान रखने पर,

$(0-3)^2 + (2-k)^2 = (0-3)^2 + (2-k)^2$

या, $9 + 4 + k^2 - 4k = k^2 + 9$

या, $4k = 4 \quad \therefore \quad k = 1.$ उत्तर।

प्रश्न 46. यदि बिन्दु Q(0, 1) बिन्दुओं P(5, –3) और R(x, 6) से समदूरस्थ हो तो x का मान ज्ञात करें। (M. Q., Set–IV : 2016)

हल : बिन्दुएँ (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) संरेखी हो तो

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

$x_1 = 0, y_1 = 1, x_2 = 5, y_2 = -3, x_3 = x$ तथा $y_3 = 6$

$0(-3-6) + 5(6-1) + x(1+3) = 0$

$\Rightarrow \quad 0 + 5 \times 5 + 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad 25 + 4x = 0$

$\Rightarrow \quad 4x = -25 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{25}{4} = 6.25$ उत्तर।

प्रश्न 47. सिद्ध करें कि तीन क्रमागत बिन्दुएँ (1, 5), (2, 4) और (3, 3) संरेख है। (M. Q., Set–V : 2016)

हल : माना कि बिन्दुएँ क्रमशः A, B और C है।

तो $AB = \sqrt{(1-2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(2-3)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(1-3)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\therefore \quad AB + BC = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = AC$

अतः प्रदत्त बिन्दु संरेखी है।

प्रश्न 48. A का मान निकालें, यदि P और Q का निर्देशांक क्रमशः (–1, 4) और (a, 3) हो, उनके बीच की दूरी 1 हो। (M. Q., Set–V : 2016)

हल : सूत्र से, $PQ^2 = (a+1)^2 + (3-4)^2 = (a+1)^2 + 1$

प्रश्न से, $PQ = 1$

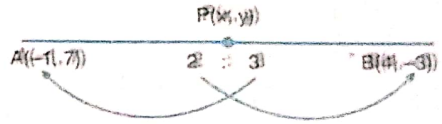
$\therefore \quad (1)^2 = (a+1)^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = (a+1)^2 + 1$

$\Rightarrow \quad (a+1)^2 = 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a + 1 = 0$

$\therefore \quad a = -1.$ उत्तर।

प्रश्न 49. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं (–1, 7) और (4, –3) को मिलाने वाले रेखाखंड को 2 : 3 के अनुपात में विभाजित करता है।
(M. Q., Set–V : 2011, 2016A)

हल : मान लीजिए P(x, y) वांछित बिंदु है।



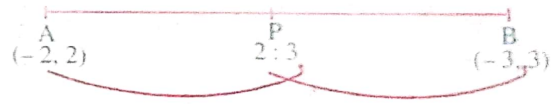
तब, $x = \frac{2 \times 4 + 3 \times -1}{2+3} = \frac{8-3}{5} = 1$

और $y = \frac{2 \times -3 + 3 \times 7}{2+3} = \frac{-6+21}{5} = 3$

अतः P के निर्देशांक हैं (1, 3); उत्तर।

प्रश्न 50. उस बिन्दु का निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जो बिन्दुओं (– 2, 2) और (– 3, 3) को मिलाने वाली रेखाखण्ड को 2 : 3 के अनुपात में विभाजित करती है। (2014A)

हल : मान लिया कि P (x, y) वांछित बिन्दु है।



तब $x = \frac{2 \times -3 + 3 \times -2}{2+3} = \frac{-6-6}{5} = \frac{-12}{5}$

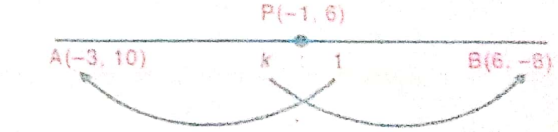
$y = \frac{2 \times 3 + 3 \times 2}{2+3} = \frac{6+6}{5} = \frac{12}{5}$

$P(x, y) = P\left(-\frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right)$. उत्तर।

प्रश्न 51. बिंदुओं (–3, 10) और (6, –8) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को बिंदु (–1, 6) किस अनुपात में विभाजित करता है ?
(M. Q., Set–I : 2011, M. Q., Set–IV : 2016)

हल : मान लीजिए बिंदु P(–1, 6), बिंदुओं A(–3, 10) और B(6, –8) को मिलाने वाले रेखाखंड को k : 1 के अनुपात में विभाजित करता है, तब बिंदु P के निर्देशांक $\left(\frac{6k-3}{k+1}, \frac{-8k+10}{k+1}\right)$ होंगे।

लेकिन P के निर्देशांक (–1, 6) दिए गए हैं।



$\therefore \quad \frac{6k-3}{k \quad 1} = -1$ और $\frac{-8k+10}{k+1} = 6$

$\Rightarrow \quad 6k - 3 = -k - 1$ और $-8k + 10 = 6k + 6$

$\Rightarrow \quad 6k + k = -1 + 3$ और $-8k - 6k = 6 - 10$

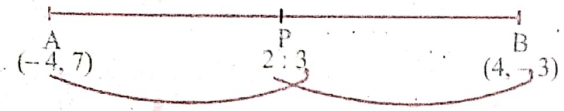
$\Rightarrow \quad 7k = 2$ और $-14k = -4$

$\Rightarrow \quad k = \frac{2}{7}$ और $k = \frac{-4}{-14} = \frac{2}{7}$

अतः बिंदु P रेखाखंड AB को 2 : 7 के अनुपात में विभाजित करता है; उत्तर।

प्रश्न 52. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (– 4, 7) और (4, – 3) को मिलाने वाली रेखाखण्ड को 2 : 3 के अनुपात में विभाजित करती है। (2014A)

हल : $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} = \frac{2\times 4 + 3\times -4}{2+3} = \frac{8-12}{5} = \frac{-4}{5}$



$y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} = \frac{2\times -3 + 3\times 7}{2+3} = \frac{-6+21}{5} = \frac{15}{5} = 3$

$P(x, y) = \frac{-4}{5}, 3$ उत्तर।

प्रश्न 53. उस बिन्दु का निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जो बिन्दुओं (3, 4) और (9, 7) को मिलाने वाली रेखाखण्ड को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है। (2014C)

हल : माना कि A = (3, 4) और B = (9, 7)
माना कि P (x, y), AB को 1 : 2 के अनुपात में विभाजन करता है।
जब विभाजन आंतरिक है तो सूत्र से,

$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$ और $y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$

$= \frac{1\times 9 + 2\times 3}{1+2}$ $= \frac{1\times 7 + 2\times 4}{1+2}$

$= \frac{9+6}{3}$ $= \frac{7+8}{3}$

$= \frac{15}{3} = 5$ $= \frac{15}{3} = 5$

अत: अभीष्ट बिन्दु p (x, y) का निर्देशांक (5, 5) हैं उत्तर।
जब विभाजन बाह्य हो तो सूत्र से,

$x = \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$ और $y = \frac{my_2 - ny_1}{m-n}$

$= \frac{1\times 9 - 2\times 3}{1-2}$ $= \frac{1\times 7 - 2\times 4}{1-2}$

$= \frac{9-6}{-1}$ $= \frac{7-8}{-1}$

$= -3$ $= 1$

अत: अभीष्ट बिन्दु p (x, y) का निर्देशांक (–3, 1) है। उत्तर।

प्रश्न 54. बिन्दु (3, –6) और (5, 3) को x-अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है। (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : माना $k : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है। तब प्रतिच्छेद बिन्दु की कोटि $= \frac{-6k+3}{k+1} = 0$

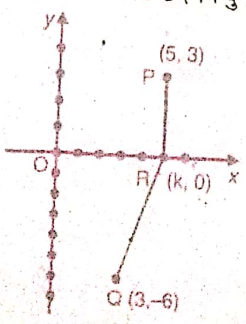
$\Rightarrow -6k + 3 = 0$

$\Rightarrow 6k = 3$

$\therefore k = \frac{1}{2}$

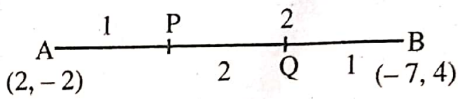
अभीष्ट अनुपात $= \frac{1}{2} : 1$

या, 1 : 2 उत्तर।



प्रश्न 55. बिन्दुओं A (2, –2) और B (–7, 4) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को समत्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिये। (2017A)

हल : माना कि P और Q समत्रिभाजित करने वाले बिन्दु हैं, तो P, AB को 1 : 2 के अनुपात में और Q, AB को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करते हैं।



$\therefore$ P के निर्देशांक $= \left(\frac{1\times -7 + 2\times 2}{1+2}, \frac{1\times 4 + 2\times -2}{1+2}\right)$

$= \left(\frac{-7+4}{3}, \frac{4-4}{3}\right) = \left(\frac{-3}{3}, 0\right) = (-1, 0)$

तथा Q के निर्देशांक $= \left(\frac{2\times -7 + 1\times 2}{2+1}, \frac{2\times 4 + 1\times -2}{2+1}\right)$

$= \left(\frac{-14+2}{3}, \frac{8-2}{3}\right)$

$= \left(\frac{-12}{3}, \frac{6}{3}\right) = (-4, 2)$. उत्तर।

प्रश्न 56. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में, (3, 0), (4, 5), (–1, 4) और (–2, –1) हैं।

(M.Q., Set–IV : 2011, 2012C)

हल : मान लीजिए A(3, 0), B(4, 5), C(–1, 4) और D(–2, –1) समचतुर्भुज ABCD के शीर्ष हैं।

विकर्ण $AC = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

और विकर्ण $BD = \sqrt{(-2-4)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$

समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (विकर्णों की लंबाई का गुणनफल)

$= \frac{1}{2} \times AC \times BD$

$= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}$ वर्ग इकाई

= 24 वर्ग इकाई; उत्तर।

प्रश्न 57. दर्शाइए कि समकोण त्रिभुज OBA में कर्ण का मध्य बिन्दु C त्रिभुज के शीर्षों O, A तथा B से बराबर दूरी पर है।

(M. Q., Set–V : 2011)

हल : $AB^2 = (2a-0)^2 + (0-2a)^2 = 4a^2 + 4a^2 = 8a^2$

$\therefore AB = 2a\sqrt{2}$ या, $AC = BC = a\sqrt{2}$ ... (1)

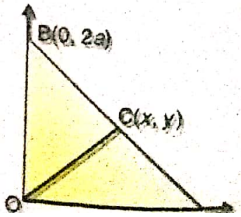
अब AB का मध्य बिन्दु

$(x, y) = \left(\frac{0+2a}{2}, \frac{2a+0}{2}\right) = (a, a)$

$OC = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से,

$AC = BC = OC$ उत्तर।



प्रश्न 58. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालें जिनके शीर्षों का नियामक (3, 4), (– 4, 3) और (8, 6) हैं। **(M. Q. Set–IV : 2015)**

हल : Δ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$

$= \frac{1}{2}[3(3-6)+(-4)(6-4)+8(4-3)]$

$= \frac{1}{2}[3\times-3-4\times2+8\times1] = \frac{1}{2}[-9-8+8]$

$= \left|\frac{1}{2}\times-9\right| = \left|\frac{-9}{2}\right| = 4.5$ वर्ग सेमी. उत्तर।

प्रश्न 59. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (1, –1), (–4, 6) और (–3, –5) हैं। **(2011A)**

हल : माना कि $A = (x_1y_1) = (1, -1)$, $B = (x_2, y_2) = (-4, 6)$

$C = (x_3, y_3) = (-3, -5)$

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$

$= \frac{1}{2}[1\{6-(-5)\}+(-4)\{(-5)-(-1)\}+(-3)\{(-1)-6\}]$

$= \frac{1}{2}[1(6+5)+(-4)(-5+1)+(-3)(-1-6)]$

$= \frac{1}{2}[1\times11+(-4)(-4)+(-3)(-7)]$

$= \frac{1}{2}(11+16+21)$

$= \frac{1}{2}\times48 = 24$ वर्ग इकाई; उत्तर।

प्रश्न 60. (7, –2), (5, 1), (3, k) में 'k' का मान ज्ञात कीजिए, ताकि तीनों बिंदु सरेखी हों। **(2013A)**

हल : मान लीजिए दिए गए बिंदु $A = (x_1, y_1) = (7, -2), B = (x_2, y_2) = (5, 1)$ और $C = (x_3, y_3) = (3, k)$ एक रेखाखंड में होंगे। यदि क्षेत्रफल (Δ ABC) = 0

$\Rightarrow x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2) = 0$

$\Rightarrow 7(1-k)+5(k+2)+3(-2-1) = 0$

$\Rightarrow 7-7k+5k+10-9 = 0$

$\Rightarrow 8-2k = 0 \quad \Rightarrow 2k = 8$

$\Rightarrow k = 4$

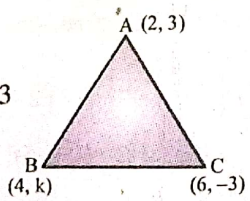
अत: दिए गए बिंदु, $k = 4$ के लिए सरेखी हैं; उत्तर।

प्रश्न 61. k का मान ज्ञात कीजिए, यदि बिंदु A(2, 3), B(4, k) और C(6, –3) सरेखी हैं। **(2011A, 2013C, M. Q. Set–III : 2015, 2017A)**

हल : $A = (2, 3)$, $x_1 = 2$, $y_1 = 3$

$B = (4, k)$, $x_2 = 4$, $y_2 = k$

$C = (6, -3)$, $x_3 = 6$, $y_3 = -3$



सरेखी के लिए—

ΔABC का क्षेत्रफल = 0.

$\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}[2(k+3)+4(-3-3)+6(3-k)] = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}[2k+6+4(-6)+18-6k] = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}[2k+6-24+18-6k] = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}[-4k] = 0 \quad \therefore k = 0$; उत्तर।

प्रश्न 62. सिद्ध करें कि बिन्दु A (–3, 0), B (1, –3) एवं C (4, 1) किसी समकोण समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं। **(2011C)**

हल : मान लीजिए, A (–3, 0), B (1, –3) एवं C (4, 1) दिए गए बिन्दु हैं

तब, $AB = \sqrt{\{1-(-3)\}^2+\{(-3)-0\}^2}$

$= \sqrt{(4)^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ इकाई

$BC = \sqrt{(4-1)^2+\{1-(-3)\}^2} = \sqrt{(3)^2+(4)^2}$

$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ इकाई

$AC = \sqrt{(-3-4)^2+(0-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

परन्तु $AB^2+BC^2 = AC^2$; $(5)^2+(5)^2 = (5\sqrt{2})^2$

अत: ΔABC समकोण समद्विबाहु त्रिभुज है। **Proved.**

प्रश्न 63. सिद्ध करें कि बिन्दु (–1.5, 3), (6, –2) एवं (–3, 4) रैखिक हैं। **(2011C)**

हल : $A = (-1.5, 3)$ $x_1 = -1.5$ $y_1 = 3$

$B = (6, -2)$ $x_2 = 6$ $y_2 = -2$

$C = (-3, 4)$ $x_3 = -3$ $y_3 = 4$

$\therefore$ ΔABC का क्षे॰ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$

$= \frac{1}{2}[-1.5(-2-4)+6(4-3)+(-3)(3-(-2))]$

$= \frac{1}{2}[9+6-15] = \frac{1}{2}[15-15] = \frac{1}{2}(0) = 0$

अत: बिन्दु A, B, C रैखिक है। **Proved.**

प्रश्न 64. यदि Δ OAB में $\angle AOB = 90°$ तथा OA = a, OB = b, AB = c और O से OP (= p) AB पर लम्ब डाला गया है, तो सिद्ध करें कि

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$ **(2011C)**

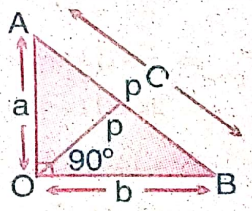
हल : ΔAOB का क्षे॰ $= \frac{1}{2}\times AO\times OB = \frac{1}{2}\times a\times b$ ... (1)

ΔAOB का क्षे॰ $= \frac{1}{2}\times c\times p$ ... (2)

अत: समीकरण (1) तथा (2) से,

$cp = ab$

$c = \frac{ab}{p}$ ... (3)



परन्तु, $c^2 = a^2+b^2$

$\left(\frac{ab}{p}\right)^2 = a^2+b^2$ (समी॰ (3) से)

$\frac{a^2b^2}{p^2} = a^2+b^2$; $\frac{1}{p^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{a^2}{a^2b^2}+\frac{b^2}{a^2b^2}$

$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ **Proved.**

प्रश्न 65. यदि बिन्दु A (6, 1), B (8, 2), C (9, 4) और D (p, 3) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष इसी क्रम में हों, तो p का मान ज्ञात कीजिए। **(2013A, M.Q., Set–II : 2016)**

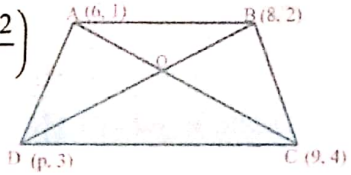
हल : समांतर चतुर्भुज के विकर्ण AC तथा BD एक-दूसरे को O पर समद्विभाजित करते हैं।

अत: AC के मध्य बिन्दु का निर्देशांक = BD के मध्य बिन्दु का निर्देशांक

AC के मध्य बिन्दु O का निर्देशांक $= \left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$

BD के मध्य बिन्दु O का निर्देशांक

$= \left(\frac{p+8}{2}, \frac{3+2}{2}\right)$



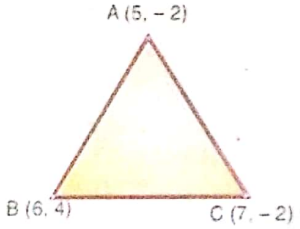
अत: $\frac{p+8}{2} = \frac{5}{2}$

या, $p + 8 = 5$

$\therefore p = 5 - 8 = -3$. उत्तर।

प्रश्न 66. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुएँ (5, –2), (6, 4) और (7, –2) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं। (2013C, 2015C, M. Q. Set-II : 2015)

हल : माना कि एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसके शीर्ष क्रमश: A (5, –2), B (6, 4) तथा C (7, –2) हैं।



$AB = \sqrt{(5-6)^2 + (-2-4)^2}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}$

$AC = \sqrt{(5-7)^2 + (-2+2)^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$

$BC = \sqrt{(6-7)^2 + (4+2)^2}$

$= \sqrt{(-1)^2 + 6^2} = \sqrt{37}$ $\quad \because AB = BC$

अत: प्रदत्त बिन्दु एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं। उत्तर।

प्रश्न 67. k का मान ज्ञात कीजिए, यदि तीनों बिन्दु (4, 6) (8, k) (12, – 6) संरेखी हों। (2014A)

हल : A = (4, 6); $x_1 = 4$; $y_1 = 6$

B = (8, k); $x_2 = 8$; $y_2 = k$

C = (12, – 6); $x_3 = 12$; $y_3 = -6$

संरेखी के लिए,

ABC का क्षेत्रफल = 0

$\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}[4\{k - (-6)\} + 8(-6 - 6) + 12(6 - k)] = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}[4(k+6) + 8 \times -12 + 12(6-k)] = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 2[2(k-6) + 4 \times -12 + 6(6-k)] = 0$

$\Rightarrow 2k + 12 - 48 + 36 - 6k = 0$

$\Rightarrow -4k = 0 \quad \Rightarrow k = \frac{0}{-4}$

$\therefore k = 0$. उत्तर।

प्रश्न 68. k का मान ज्ञात कीजिए यदि तीनों बिन्दु (8, 1) (k, – 4) तथा (2, – 5) संरेखी हैं। (2014A, 2016C)

हल : मान लीजिए दिए गए बिन्दु A(8, 1), B(k, – 4) और C(2, – 5) हैं।

यहाँ $x_1 = 8$, $x_2 = k$, $x_3 = 2$

$y_1 = 1$, $y_2 = -4$, $y_3 = -5$

तीन बिन्दु संरेखी होते हैं यदि

$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$

या, $8(-4 + 5) + k(-5 - 1) + 2(1 + 4) = 0$

या, $8 - 6k + 10 = 0$ या, $-6k = -18$

$\therefore k = \frac{18}{6} = 3$. अत: $k = 3$. उत्तर।

प्रश्न 69. सिद्ध करें कि बिन्दुओं (3, 3), (a, 0) और (0, b) संरेखी हैं, यदि $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{3}$. (2015A)

हल : माना कि A = (3, 3), B = (a, 0) और C = (0, b)

अब बिन्दुएँ A, B, C संरेखी होंगे यदि ABC का क्षेत्रफल = 0

$\Rightarrow \frac{1}{2}[3(0-b) + a(b-3) + 0(3-0)] = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(-3b + ab - 3a) = 0 \Rightarrow -3b + ab - 3a = 0$

$\Rightarrow -3b - 3a = -ab \quad \Rightarrow 3b + 3a = ab$

दोनों तरफ ab से भाग देने पर,

$\Rightarrow \frac{3b}{ab} + \frac{3a}{ab} = \frac{ab}{ab} \quad \Rightarrow \frac{3}{a} + \frac{3}{b} = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{3}$ Proved.

प्रश्न 70. त्रिभुज के केन्द्रक का निर्देशांक (1, 3) है तथा त्रिभुज के दो शीर्ष (– 7, 6) और (8, 5) हैं, तो त्रिभुज का तीसरा शीर्ष निकालें। (2015C)

हल : माना कि ABC एक Δ है।

माना $A(x_1, y_1) = (-7, 6)$

$B(x_2, y_2) = (8, 5)$

$C(x_3, y_3) = (a, b)$

सूत्र से,

$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad 1 = \frac{-7 + 8 + a}{3} = \frac{1 + a}{3}$

$\Rightarrow 3 = 1 + a \qquad \therefore a = 3 - 1 = 2$

$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \qquad 3 = \frac{6 + 5 + b}{3} = \frac{11 + b}{3}$

$\Rightarrow 9 = 11 + b \qquad \Rightarrow 9 - 11 = b$

$b = -2$.

तीसरा शीर्ष C (a, b) = (2, – 2). उत्तर।

प्रश्न 71. x के किस मान के लिए बिन्दु A (x, 2), B (–3, –4) और C (7, –5) संरेख होगा ? (2017A)

हल : A = (x, 2), $x_1 = x$, $y_1 = 2$

B = (– 3, – 4), $x_2 = -3$, $y_2 = -4$

C = (7, – 5), $x_3 = 7$, $y_3 = -5$

संरेखी के लिए

ABC का क्षेत्रफल = 0

$\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0$

$\frac{1}{2}[x\{-4 - (-5)\} + (-3)(-5 - 2) + 7\{2 - (-4)\} = 0$

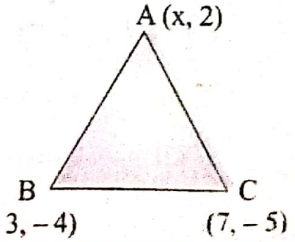
$\frac{1}{2}[x(-4 + 5) + (-3)(-7) + 7(2 + 4)] = 0$

$\frac{1}{2}[x \times 1 + 21 + 42] = 0$

$\frac{1}{2}[x + 63] = 0$

$x + 63 = 0$

$x = -63 = 63$ इकाई उत्तर।



प्रश्न 72. k का मान ज्ञात कीजिए, यदि तीनों बिन्दुएँ (16, 2) (k, –8) तथा (4, –10) सरेखी हों। (2014C)

हल : मान लिया कि $A(x_1, y_1) = (16, 2)$, $B(x_2, y_2) = (k, -8)$ और $C(x_3, y_3) = (4, -10)$

यदि ΔABC का क्षे० $= 0$, तो सरेखी होगा।

$\Rightarrow x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$

$\Rightarrow 16(-8 + 10) + k(-10 - 2) + 4(2 + 8) = 0$

$\Rightarrow 16 \times 2 + k \times -12 + 4 \times 10 = 0$

$\Rightarrow 32 - 12k + 40 = 0 \quad \Rightarrow -12k + 72 = 0$

$\Rightarrow -12k = -72 \quad \therefore k = \frac{72}{12} = 6$

अतः दिए गए बिन्दु $k = 6$ से सरेखी है। उत्तर।

त्रिकोणमिति का परिचय

प्रश्न 1. $(\sec^2 A - 1)$ का मान लिखें। (2013A)

हल : $\tan^2 A$..

प्रश्न 2. $\sin 30°$ का मान लिखें। (2013A)

हल : ½.

प्रश्न 3. $\sin 30°$ का मान लिखें। (M. Q., Set–II : 2011)

हल : $\sin 30° = \frac{1}{2}$

प्रश्न 4. $\sin^2 60° + \cos^2 60°$ का मान बतावें। (M. Q., Set–I : 2011)

हल : $\sin^2 60° + \cos^2 60° = 1$

$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ उत्तर।

प्रश्न 5. यदि $\tan 2A = \cot(A - 18°)$ तो A का मान ज्ञात करें जबकि 2A एक न्यून कोण है। (M. Q., Set–I : 2011, M. Q., Set–I & V : 2015)

हल : 36°.

संकेत : $\cot(90° - 2A) = \cot(A - 18°)$

$\Rightarrow 90° - 2A = A - 18° \quad \Rightarrow 108° = 3A$

$\therefore A = \frac{108}{3} = 36°$ उत्तर।

प्रश्न 6. $\sin^2 61° + \cos^2 \frac{122°}{2}$ का मान कितना होगा ? (M. Q., Set–III : 2011)

हल : $\sin^2 61° + \cos^2\left(\frac{122°}{2}\right) = \sin^2 61° + \cos^2 61° = 1$. उत्तर।

प्रश्न 7. $\frac{\tan 19}{\cot 71}$ का मान कितना होगा ? (M. Q., Set–III : 2011)

हल : $\frac{\tan 19°}{\cot 71°} = \frac{\tan(90° - 71°)}{\cot 71°} = \frac{\cot 71°}{\cot 71°} = 1$ उत्तर।

प्रश्न 8. $\sin\theta . \cot\theta$ का व्युत्क्रम बतावें। (M. Q., Set–III : 2011)

हल : $\sin\theta \cot\theta = \sin\theta \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cos\theta$.

व्युत्क्रम $= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$ उत्तर।

प्रश्न 9. यदि $\cot\theta = \tan(30° + \theta)$; $\theta < 90$; $30 + \theta < 90$, तो θ का मान ज्ञात करें। (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : $\cot\theta = \tan(30 + \theta) = \tan[90 - (60 - \theta)] = \cot(60 - \theta)$

$\theta = 60 - \theta; \quad 2\theta = 60$

$\therefore \theta = 30°$. उत्तर।

प्रश्न 10. $\sin\theta$ को $\sec\theta$ के पदों में व्यक्त करें। (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}}$

प्रश्न 11. $\frac{\sin 18°}{\cos 72°}$ का मान निकालिए।

अथवा, मान ज्ञात करें : $\frac{\sin 18°}{\cos 72°}$. (M. Q., Set–I : 2011, 2011C)

हल : $\frac{\sin 18°}{\cos 72°} = \frac{\sin 18°}{\cos(90° - 18°)} = \frac{\sin 18°}{\sin 18°} = 1$; उत्तर।

[$\because \cos(90° - \theta) = \sin\theta$]

प्रश्न 12. $\frac{\tan 26°}{\cot 64°}$ का मान निकालिए। (2011A)

हल : $\frac{\tan 26°}{\cot 64°} = \frac{\tan 26°}{\cot(90° - 26°)} = \frac{\tan 26°}{\tan 26°} = 1$; उत्तर।

[$\because \cot(90° - \theta) = \tan\theta$]

प्रश्न 13. $\cos 48° - \sin 42°$ का मान निकालिए। (M. Q., Set–III : 2011)

हल : $\cos 48° - \sin 42° = \cos(90° - 42°) - \sin 42°$

[$\because \cos(90° - \theta) = \sin\theta$]

$= \sin 42° - \sin 42° = 0$; उत्तर।

प्रश्न 14. यदि $\cot A = \frac{a}{b}$ जहाँ $a, b \in R$, तो $\sin^2 A$ का मान ज्ञात करें। (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : $\cos A = \frac{a}{b} \Rightarrow \cos^2 A = \frac{a^2}{b^2}$

$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2 - a^2}{b^2}$

प्रश्न 15. $\frac{2\tan 30°}{1 - \tan^2 30°}$ का मान निकालिए। (2011C)

हल : $\frac{2\tan 30°}{1 - \tan^2 30°} = \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \sqrt{3}$. उत्तर।

प्रश्न 16. $\text{cosec}^2 A - 1$ का मान ज्ञात कीजिए। (2011A)

हल : $\text{cosec}^2 A - 1 = \frac{1}{\sin^2 A} - 1 = \frac{1 - \sin^2 A}{\sin^2 A}$

$= \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \cot^2 A$. उत्तर।

प्रश्न 17. यदि $\cot\theta = \frac{3}{4}$ तो $\tan^2\theta$ का मान ज्ञात करें। (2011C)

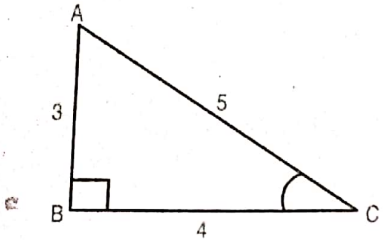
हल : $\cot\theta = \frac{3}{4} \quad \therefore \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} = \frac{4}{3}$

$\therefore \tan^2\theta = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$. उत्तर।

प्रश्न 18. $\frac{\tan^2 36^\circ}{\cot^2 54^\circ}$ का मान निकालें। (2013A)

हल : $\frac{\tan^2(90^\circ-36^\circ)}{\cot^2 54^\circ}=\frac{\cot^2 54^\circ}{\cot^2 54^\circ}=1$ उत्तर।

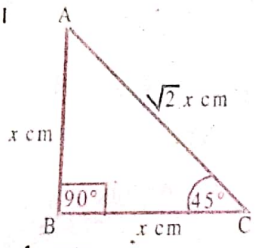
प्रश्न 19. चित्र से $\sin\theta$ का मान ज्ञात करें— (M. Q., Set–II : 2011)



हल : $\frac{3}{5}$. संकेत : $\sin\theta=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{5}$

प्रश्न 20. $\tan 45^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए। (2011A)

हल : माना कि ABC एक समद्विबाहु समकोण Δ है, जिसकी समकोण बनानेवाली भुजाएँ x सेमी० हैं। $\angle B = 90^\circ$ है।



$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}$$
$$=\sqrt{x^2+x^2}$$
$$=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}x$$

$$\tan 45^\circ=\frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}=\frac{AB}{BC}=\frac{x\text{ सेमी}}{x\text{ सेमी}}=1.$$ उत्तर।

प्रश्न 21. यदि $\sin A = x$ तो $\cos A$ का मान x के पदों में निकालें। (M. Q., Set–II : 2016)

हल : $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-x^2}$ उत्तर।

प्रश्न 22. यदि $\sin 42^\circ = p$, तो $\sin 48^\circ$ का मान निकालें। (2015C)

हल : $\sin 42^\circ = \sin(90^\circ-48^\circ)=\cos 48^\circ = p$

$\therefore \sin^2 48^\circ=\sqrt{1-\cos^2 48^\circ}=\sqrt{1-p^2}$ उत्तर।

प्रश्न 23. $\frac{\tan^2 36^\circ}{\cot^2 54^\circ}$ का मान ज्ञात करें। (M. Q., Set–III : 2016)

हल : $\frac{\tan^2 36^\circ}{\cot^2 54^\circ}=\frac{\tan^2(90^\circ-54^\circ)}{\cot^2 54^\circ}=\frac{\cot^2 54^\circ}{\cot^2 54^\circ}=1$ उत्तर।

प्रश्न 24. $\frac{\tan 60^\circ}{\sin 60^\circ+\cos 30^\circ}$ का मान निकालें। (2016C)

हल : $\frac{\tan 60^\circ}{\sin 60^\circ+\cos 30^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2\frac{\sqrt{3}}{2}}=1.$ उत्तर।

प्रश्न 25. सिद्ध करें कि $\sin 48^\circ . \sin 23^\circ . \sec 42^\circ . \sec 67^\circ = 1$. (2014A)

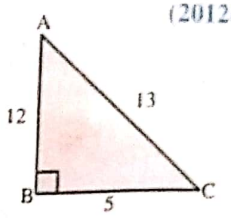
हल : L.H.S. $= \sin 48^\circ . \sin 23^\circ . \sec 42^\circ . \sec 67^\circ$
$= \sin 48^\circ . \sin 23^\circ . \sec(90^\circ-48^\circ) . \sec(90^\circ-23^\circ)$
$= \sin 48^\circ . \sin 23^\circ . \operatorname{cosec} 48^\circ . \operatorname{cosec} 23^\circ$
$= \sin 48^\circ . \sin 23^\circ . \frac{1}{\sin 48^\circ} . \frac{1}{\sin 23^\circ}=1.$ Proved.

प्रश्न 26. यदि $\tan A = \cot B$ तथा A और B न्यूनकोण है, तो सिद्ध करें $A + B = 90^\circ$. (M. Q., Set–I : 2015, 2015A, 2017A)

हल : $\because \tan A = \cot B \Rightarrow \tan A = \tan(90^\circ - B)$
$\Rightarrow A = 90^\circ - B \quad \therefore A + B = 90^\circ$. Proved.

प्रश्न 27. $\sin\theta = \frac{12}{13}$ हो, तो $\cos\theta$ और $\tan\theta$ का मान ज्ञात करें। (2012C)

हल : यहाँ $p = 12, h = 13 \therefore b = 5$



$$\cos\theta=\frac{b}{h}=\frac{5}{13}$$
$$\tan\theta=\frac{p}{b}=\frac{12}{5}$$ उत्तर।

प्रश्न 28. मान निकालें $\sin 25^\circ . \cos 65^\circ + \cos 25^\circ . \sin 65^\circ$. (M. Q., Set–I : 2016)

हल: $\sin 25^\circ . \cos 65^\circ + \cos 25^\circ . \sin 65^\circ$
$= \sin 25^\circ \cos(90^\circ - 25^\circ) + \cos 25^\circ . \sin(90^\circ - 25^\circ)$
$= \sin 25^\circ . \sin 25^\circ + \cos 25^\circ . \cos 25^\circ$
$= \sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ = 1$ उत्तर।

प्रश्न 29. मान निकालें : $\sin 45^\circ . \cos 45^\circ - \sin 30^\circ . \cos 30^\circ$. (M. Q., Set–V: 2016)

हल : $\sin 45^\circ . \cos 45^\circ - \sin 30^\circ . \cos 30^\circ$
$=\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ उत्तर।

प्रश्न 30. $2\cos^2 A+\frac{2}{1+\cot^2 A}$ का मान निकालें। (M. Q., Set–IV: 2016)

हल : $2\cos^2 A+\frac{2}{1+\cot^2 A}=2\cos^2 A+\frac{2}{\sec^2 A}$
$= 2\cos^2 A + 2\cos^2 A = 4\cos^2 A$. उत्तर।

प्रश्न 31. $\sin A$ को $\sec A$ एवं $\operatorname{cosec} A$ के पदों में व्यक्त करें। (M. Q., Set–III : 2016)

हल : $\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$

$\therefore \operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}$ उत्तर।

प्रश्न 32. $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए। (2011A, 2012A, M. Q., Set–V : 2015, 2015C)

हल : $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$
$= 2(\tan 45^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2 - (\sin 60^\circ)^2$
$= 2(1)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=2$; उत्तर।

प्रश्न 33. सिद्ध करें कि $\cot 48^\circ . \cot 23^\circ . \cot 42^\circ . \cot 67^\circ = 1$. (2014A)

हल : L.H.S. $= \cot 48^\circ . \cot 23^\circ . \cot 42^\circ . \cot 67^\circ$
$= \cot(90^\circ - 42^\circ) . \cot(90^\circ - 67^\circ) . \cot 42^\circ . \cot 67^\circ$
$= \tan 42^\circ . \tan 67^\circ . \cot 42^\circ . \cot 67^\circ$
$= \tan 42^\circ . \tan 67^\circ . \frac{1}{\tan 42^\circ} . \frac{1}{\tan 67^\circ}=1.$ Proved.

प्रश्न 34. मान ज्ञात करें : $\frac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°}$. (2011C)

हल : $\frac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°} = \frac{\sin^2 (90°-27°) + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 (90°-17°)}$

[$\because \sin(90° - \theta) = \cos\theta$ और $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$]

$= \frac{\cos^2 27° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \sin^2 17°} = \frac{1}{1} = 1$. उत्तर।

प्रश्न 35. यदि $\sin 3A = \cos(A - 26°)$, जहाँ 3A एक न्यूनकोण हो, तो A का मान ज्ञात करें। (2011A, 2016A)

हल : $\sin 3A = \cos(A - 26°)$

$\Rightarrow \cos(90° - 3A) = \cos(A - 26°)$ [$\because \cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\Rightarrow 90° - 3A = A - 26°$ $\Rightarrow 90° + 26° = A + 3A$

$\Rightarrow 116° = 4A$ $\Rightarrow A = \frac{116°}{4} = 29°$ उत्तर।

प्रश्न 36. यदि $\sin 3\theta = \cos(\theta - 6)°$ जहाँ 3θ न्यून है, तो θ का मान निकालें। (M. Q., Set–II : 2016)

हल : $\sin 3\theta = \cos(\theta - 6)°$

$\Rightarrow \cos(90° - 3\theta) = \cos(\theta - 6°)$

$\Rightarrow 90° - 3\theta = \theta - 6°$ $\Rightarrow 90° + 6° = \theta + 3\theta$

$\Rightarrow 4\theta = 96°$ $\therefore \theta = \frac{96°}{4} = 24°$ उत्तर।

प्रश्न 37. साबित करें :

$\tan 7° \cdot \tan 23° \cdot \tan 60° \cdot \tan 67° \cdot \tan 83° = \sqrt{3}$

(M. Q., Set–IV: 2016)

हल : L.H.S = $\tan 7° \cdot \tan 23° \cdot \tan 60° \cdot \tan 67° \cdot \tan 83°$

$= \tan(90° - 83°) \cdot \tan(90° - 67°) \cdot \tan 60° \cdot \tan 67° \cdot \tan 83°$

$= \cot 83° \cdot \cot 67° \cdot \tan 60° \cdot \tan 67° \cdot \tan 83°$

$= (\cot 83° \cdot \tan 83°)(\cot 67° \cdot \tan 67°) \cdot \tan 60°$

$= 1.1.\sqrt{3} = \sqrt{3}$

प्रश्न 38. त्रिभुज ABC में और $AC = 6\sqrt{2}$ cm सेमी AB = 6 cm तथा BC = 6 cm हो, तो $\angle B$ का मान निकालें। (M. Q., Set–IV : 2015; M. Q., Set–I : 2016)

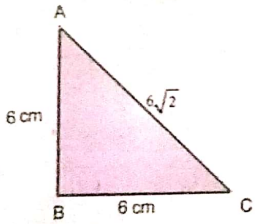
हल : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 6^2 + 6^2$

$= 36 + 36 = 72$

$\therefore AC = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$

$\therefore \angle B = 90°$. उत्तर।



प्रश्न 39. यदि $\sin A = \frac{3}{4}$ तो cosA और tan A का मान निकालें।

(M. Q., Set–IV & V : 2015)

हल : $\sin A = \frac{3}{4}$

$\therefore \cos A = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{16-9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ उत्तर।

$\therefore \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3/4}{\sqrt{7}/4} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$. उत्तर।

प्रश्न 40. यदि $\theta = 30°$ तो सिद्ध करें कि $4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 0$. (2015A)

हल : L.H.S. $= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4\cos^3 30° - 3\cos 30°$

$= 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3.\frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$ Proved.

प्रश्न 41. यदि $\sec 4A = \text{cosec}(A - 20°)$, जहाँ 4A एक न्यूनकोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए। (2013A, 2013C)

हल : दिया है : $\sec 4A = \text{cosec}(A - 20°)$

A ज्ञात करने के लिए हमें दोनों ओर sec θ या cosec θ चाहिए।

[$\because \text{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$]

$\Rightarrow \text{cosec}(90° - 4A) = \text{cosec}(A - 20°)$

$\Rightarrow 90° - 4A = A - 20°$

$\Rightarrow 5A = 110°$ $\Rightarrow A = 22°$; उत्तर।

प्रश्न 42. यदि $\tan\theta = 0.75$ तो $\sin\theta$ और $\text{cosec}\theta$ का मान निकालें। (M. Q., Set–III : 2015)

हल : $\because \tan\theta = 0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

$\therefore h = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore \sin\theta = \frac{3}{5}$, $\text{cosec}\,\theta = \frac{5}{3}$. उत्तर।

प्रश्न 43. यदि $\theta = 45°$, तो $\tan^2\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}$ का मान निकालें। (2015A)

हल : $\tan^2\theta + \frac{1}{\sin^2\theta} = \tan^2\theta + \text{cosec}^2\theta$

$= \tan^2 45° + \text{cosec}^2 45°$

$= (1)^2 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2 = 3$. उत्तर।

प्रश्न 44. यदि $x\cos\theta = 1$ और $\tan\theta = y$ तो $x^2 - y^2$ का मान निकालें। (M. Q., Set–II : 2015)

हल : $x\cos\theta = 1$

$\therefore x = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$ $\therefore x^2 - y^2 = \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\therefore x^2 - y^2 = 1$. उत्तर।

प्रश्न 45. सिद्ध करें $\frac{\tan^3\theta - 1}{\tan\theta - 1} = \sec^2\theta + \cos\theta$.

(M. Q., Set–II : 2015)

हल : L.H.S. $= \frac{\tan^3\theta - 1}{\tan\theta - 1} = \frac{(\tan\theta - 1)(\tan^2\theta + \tan\theta + 1)}{(\tan\theta - 1)}$

$= 1 + \tan^2\theta + \tan\theta = \sec^2\theta + \tan\theta$

= R.H.S. Proved.

प्रश्न 46. सिद्ध करें कि $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$. (2011C)

हल : बायाँ पक्ष $= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \times \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$

$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ = दायाँ पक्ष Proved.

प्रश्न 47. दिखाइए कि $\tan 42^\circ \cdot \tan 48^\circ \cdot \tan 23^\circ \cdot \tan 67^\circ = 1$. (2016A)

हल :

$$\text{L.H.S.} = \tan 42^\circ \cdot \tan 48^\circ \cdot \tan 23^\circ \cdot \tan 67^\circ$$
$$= \tan 42^\circ \cdot \tan (90^\circ - 42^\circ) \cdot \tan 23^\circ \cdot \tan (90^\circ - 23^\circ)$$
$$= \tan 42^\circ \cdot \cot 42^\circ \cdot \tan 23^\circ \cdot \cot 23^\circ$$
$$= \tan 42^\circ \cdot \frac{1}{\tan 42^\circ} \cdot \tan 23^\circ \cdot \frac{1}{\tan 23^\circ} = 1. \text{ Proved.}$$

प्रश्न 48. यदि $\cos A = \frac{3}{4}$, तो $\sin A$ और $\tan A$ का मान परिकलित कीजिए। (2014A)

हल : $\cos A = \frac{3}{4}$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}}$$

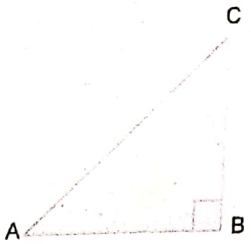
$$= \sqrt{\frac{16-9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$ उत्तर।

प्रश्न 49. यदि $\sin A = \frac{3}{5}$ तो $\cos A$ एवं $\tan A$ का मान ज्ञात करें। (M. Q., Set-I : 2011)

हल : $\therefore \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} = k$

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$
$$= \sqrt{(5k)^2 - (3k)^2}$$
$$= \sqrt{25k^2 - 9k^2}$$
$$= \sqrt{16k^2} = 4k$$



$$\therefore \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$
$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3k}{4k} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \cos A = \frac{4}{5}$$

$$\tan A = \frac{3}{4}.$$ उत्तर।

प्रश्न 50. सिद्ध करें कि $\cos 48^\circ \cdot \cos 23^\circ \cdot \operatorname{cosec} 42^\circ \cdot \operatorname{cosec} 67^\circ = 1$. (2014C)

हल : $\text{L.H.S.} = \cos 48^\circ \cdot \cos 23^\circ \cdot \operatorname{cosec} 42^\circ \cdot \operatorname{cosec} 67^\circ$
$= \cos (90^\circ - 42^\circ) \cdot \cos (90^\circ - 67^\circ) \cdot$
$\operatorname{cosec} 42^\circ \cdot \operatorname{cosec} 67^\circ$
$= \sin 42^\circ \cdot \sin 67^\circ \cdot \operatorname{cosec} 42^\circ \cdot \operatorname{cosec} 67^\circ$

$$= \sin 42^\circ \cdot \sin 67^\circ \cdot \frac{1}{\sin 42^\circ} \cdot \frac{1}{\sin 67^\circ} = 1 \text{ Proved.}$$

प्रश्न 51. यदि $\tan \theta = \frac{5}{12}$ तो $\sin\theta + \cos\theta$ का मान निकालें। (M. Q., Set-I : 2015)

हल : $\because \tan\theta = \frac{5}{12}$

$$\therefore h = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\therefore \sin\theta + \cos\theta = \frac{5}{13} + \frac{12}{13} = \frac{17}{13}.$$ उत्तर।

प्रश्न 52. यदि $\sin\theta = \frac{3}{4}$, तो $\cos\theta$ और $\tan\theta$ का मान निकालें। (M. Q., Set-III : 2015)

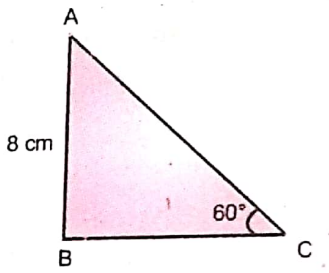
हल : $\because \sin\theta = \frac{3}{4}$

$$\therefore \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{16-9}{16} = \frac{7}{16}$$

$$\therefore \cos\theta = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$ उत्तर।

प्रश्न 53. ΔABC एक समकोण Δ है जिसमें BC क्षैतिज है $AB = 8$ cm, $\angle ABC = 60^\circ$ तो C से B की दूरी निकालें। (M. Q., Set-III : 2015)

हल : ΔABC में,



$$\angle C = 60^\circ$$

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{8}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{8}{BC}$$

$$\therefore BC = \frac{8}{\sqrt{3}}$$ उत्तर।

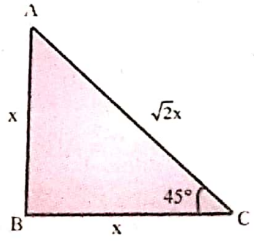
प्रश्न 54. 45° का त्रिकोणमितीय अनुपात निकालें। (2015A)

हल : मान लिया कि ABC एक समकोण समद्विबाहु Δ है, जिसकी प्रत्येक भुजा x है।

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= x^2 + x^2 = 2x^2$$

$$\therefore AC = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x.$$



$$\sin 45^\circ = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{AB}{BC} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}x}{x} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}x}{x} = \sqrt{2}$$ उत्तर।

प्रश्न 55. यदि $\sec\theta = \frac{13}{12}$, तो $\cot\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

(2016A)

हल : $\sec\theta = \frac{13}{12}$ $\quad\because\quad 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

$$\therefore \quad \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 = \left(\frac{13}{12}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{169}{144} - 1 = \frac{169-144}{144} = \frac{25}{144}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{5}{12} \quad \therefore \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{5}.$$ उत्तर।

प्रश्न 56. किसी त्रिभुज ABC में कोण B समकोण है और AB = 5cm तथा $\angle ACB = 30°$ तो भुजा BC और AC की लम्बाई प्राप्त कीजिए।

(M. Q., Set–I : 2011)

हल : माना कि एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC = 90°$ तथा $\angle ACB = 30°$

$$\sin 30° = \frac{AB}{AC} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

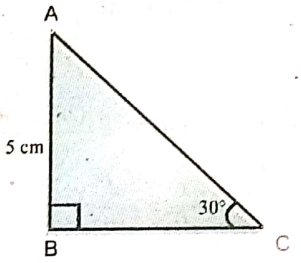
$$\Rightarrow \quad AC = 2\times 5 = 10\text{ cm}$$

$$\Rightarrow \quad \cos 30° = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{10}$$

$$\Rightarrow \quad BC \times 2 = 10\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad BC = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\text{cm}$$ उत्तर।



प्रश्न 57. यदि $\cot A = \frac{3}{4}$, तो sinA और cosA का मान परिकलित कीजिए।

(2014C)

हल : $\cot A = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 4\cos A = 3\sin A$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

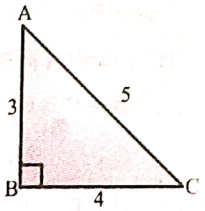
$$(4\cos A)^2 = (3\sin A)^2$$

$$16\cos^2 A = 9\sin^2 A = 9(1-\cos^2 A) = 9 - 9\cos^2 A$$

$$\Rightarrow \quad 16\cos^2 A + 9\cos^2 A = 9$$

$$\Rightarrow \quad 25\cos^2 A = 9$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2 A = \frac{9}{25} \quad \therefore \quad \cos A = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$



$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$\sin A = \frac{4}{5}$ तथा $\cos A = \frac{3}{5}$ · उत्तर।

प्रश्न 58. यदि $15\cot A = 8$, तो $\sin A$ और $\sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।

(2011A, M. Q., Set–IV : 2016)

हल : मान लीजिए ABC कोई समकोण त्रिभुज है जिसमें A न्यून कोण है और B पर समकोण है।

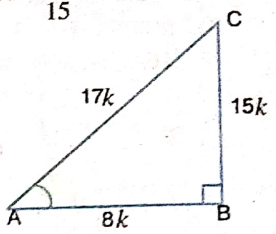
$$15\cot A = 8 \quad \therefore \quad \cot A = \frac{8}{15}$$

परन्तु $\cot A = \frac{AB}{BC}$ [आकृति से]

$$\Rightarrow \quad \frac{AB}{BC} = \frac{8}{15} = k$$

जहाँ k आनुपातिक स्थिरांक है।

$$\Rightarrow \quad AB = 8k,\ BC = 15k$$



पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर,

$$AC^2 = (AB)^2 + (BC)^2 = (8k)^2 + (15k)^2$$

$$= 64k^2 + 225k^2 = 289k^2$$

$$AC = \pm\sqrt{289\,k^2} = \pm 17k$$

$$\Rightarrow \quad AC = 17k \quad [AC \neq -17k, \text{ क्योंकि भुजा ऋणात्मक नहीं हो सकती}]$$

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17};\quad \sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{17k}{8k} = \frac{17}{8}$$

अत: $\sin A = \frac{15}{17}$ और $\sec A = \frac{17}{8}$; उत्तर।

प्रश्न 59. यदि $\sec\theta = \frac{13}{12}$, तो $\cos\theta$ एवं $\sin\theta$ का मान ज्ञात करें।

(2011C)

हल : मान लीजिए ABC कोई समकोण त्रिभुज है जिसमें B पर समकोण है।

मान लीजिए $\angle BAC = \theta$ तो $\sec\theta = \frac{13}{12}$

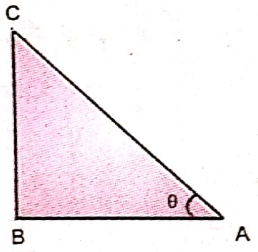
परन्तु $\sec\theta = \frac{AC}{AB}$ [आकृति से]

$$\frac{AC}{AB} = \frac{13}{12}$$

परन्तु $\frac{AC}{AB} = \frac{13}{12} = k$

जहाँ k आनुपातिकता स्थिरांक है।

$$AC = 13k \text{ और } AB = 12k$$



पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर,

$$AC^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \text{ या, } (13k)^2 = (12k)^2 + (BC)^2$$

या, $169k^2 = 144k^2 + (BC)^2$ या, $169k^2 - 144k^2 = (BC)^2$

या, $(BC)^2 = 25k^2$ या, $BC = \pm\sqrt{25k^2}$

या, $BC = \pm 5k$ या, $BC = 5k$.

$[BC \neq -5k$ क्योंकि भुजा ऋणात्मक नहीं हो सकती$]$

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13};\quad \cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$$ उत्तर।

प्रश्न 60. $\sin 60°\cos 30° - \cos 60°\sin 30°$ का मान ज्ञात करें।

(2017A)

हल : $\sin 60°\cdot\cos 30° - \cos 60°\sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$ उत्तर।

प्रश्न 61. यदि $\tan A = \frac{3}{4}$, तो sin A और cos A के मान परिकलित करें। (2014A)

हल : $\tan A = \frac{3}{4}$; $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{4}$

या, $4 \sin A = 3 \cos A$

दोनों तरफ वर्ग करने पर, $16 \sin^2 A = 9 \cos^2 A = 9 (1 - \sin^2 A)$

या, $16 \sin^2 A = 9 - 9 \sin^2 A$ या, $16 \sin^2 A + 9 \sin^2 A = 9$

या, $25 \sin^2 A = 9$ $\therefore \sin^2 A = \frac{9}{25}$

$\therefore \sin A = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

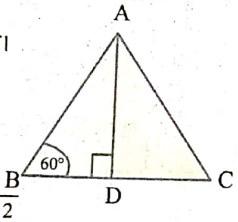
$$\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}}$$

$$= \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$\therefore \sin A = \frac{3}{5}$ तथा $\cos A = \frac{4}{5}$. उत्तर।

प्रश्न 62. 60° का त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करें। (2017A)

हल : माना ABC एक समबाहु △ है। जिसका प्रत्येक कोण 60° है।
माना कि इसकी भुजा a है।
शीर्ष A से आधार BC पर AD लम्ब डाला।



$BD = DC = \frac{a}{2}$

ABD में,

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$\sin 60° = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60° = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60° = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2$$

$$\text{cosec } 60° = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$. उत्तर।

प्रश्न 63. यदि $\sin A = \frac{5}{7}$ तो tan A का मान ज्ञात करें। (2017A)

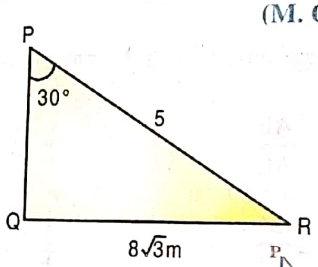
हल : $\sin A = \frac{5}{7}$

$$\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1-\frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{49-25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{2\sqrt{6}}{7}} = \frac{5}{7} \times \frac{7}{2\sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$$. उत्तर।

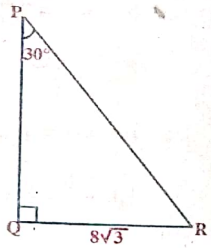
प्रश्न 64. दी गई आकृति में PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसमें QR क्षैतिज है। $QR = 8\sqrt{3}$ m तथा $\angle QPR = 30°$ हो तो Q से P की ऊँचाई ज्ञात करें। (M. Q., Set–II : 2011)



हल : $\tan 30° = \frac{QR}{PQ} = \frac{8\sqrt{3}}{PQ}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{PQ}$

$\Rightarrow PQ = 8\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 24m$ उत्तर।



प्रश्न 65. यदि $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$ एवं $\sin (A - B) = \frac{1}{2}$, $0 \le A, B \le 90°$ तथा $A > B$ तो A और B का मान निकालें। (M.Q., Set-I : 2015)

हल : $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \cos (A + B) = \cos 60°$

$\therefore A + B = 60°$ ... (i)

$\sin (A - B) = \frac{1}{2} = \sin 30°$

$\therefore A - B = 30°$ ... (ii)

(i) और (ii) से,

$A + B = 60°$; $A - B = 30°$

$\therefore 2A = 90°$ $\therefore A = 45°$ तथा $B = 15°$. उत्तर।

प्रश्न 66. यदि $\sin\theta = \sqrt{3} \cos\theta$ तो $\sin\theta + \cos\theta$ का मान निकालें। (M.Q., Set–I : 2015)

हल : $\because \sin\theta = \sqrt{3} \cos\theta$

$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{3}$ $\therefore \tan\theta = \sqrt{3} = \frac{p}{b}$

$\therefore h = \sqrt{(\sqrt{3})+1} = \sqrt{3}+ = \sqrt{4} = 2$

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. उत्तर।

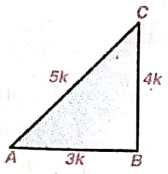
प्रश्न 67. यदि $\tan A = \frac{4}{3}$ तो कोण A के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करें। (2011A)

हल : माना कि समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B = 90°$

$$\tan A = \frac{4}{3}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{4}{3} = k$$

(जहाँ k एक धनात्मक संख्या है)



यदि $BC = 4k$

$AB = 3k$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$

$AC = 5k$

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}; \quad \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{3k}{4k} = \frac{3}{4}; \quad \text{cosec } A = \frac{AC}{BC} = \frac{5k}{4k} = \frac{5}{4}$$

$$\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{5k}{3k} = \frac{5}{3}.$$ उत्तर।

प्रश्न 68. सिद्ध करें $\frac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \sec\theta + \tan\theta.$

(M.Q., Set–I : 2015)

हल : L.H.S. $= \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta} \times \frac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$

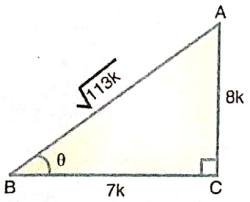
$$= \frac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec^2\theta - \tan^2\theta} = \frac{\sec\theta + \tan\theta}{1}$$

$= \sec\theta + \tan\theta$ = R.H.S. उत्तर।

प्रश्न 69. यदि $\cot\theta = \frac{7}{8}$, तो $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ का मान निकालिए। (2012C, 2013A, M.Q., Set–III : 2016)

हल : $\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{8k}{\sqrt{113}k} = \frac{8}{\sqrt{113}}$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AB} \quad \frac{7k}{\sqrt{113}k} \quad \frac{7}{\sqrt{113}}$$



$$\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}$$

$[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \cot^2\theta = \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}.$$ उत्तर।

प्रश्न 70. यदि $\sec A = \frac{25}{7}$ तो $\tan A + \cot A$ का मान ज्ञात करें।

(M. Q., Set–IV : 2011)

हल : $\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{25k}{7k}$

लम्ब $= \sqrt{(25k)^2 - (7k)^2} = \sqrt{625k^2 - 49k^2} = \sqrt{576k} = 24k$

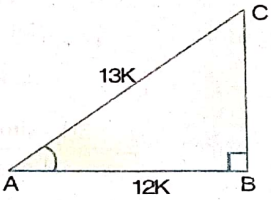
$$\tan A + \cot A = \frac{24}{7} + \frac{7}{24} = \frac{576+49}{168} = \frac{625}{168}.$$ उत्तर।

प्रश्न 71. यदि $\sec\theta = \frac{13}{12}$, हो तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित कीजिए। (M. Q., Set–V : 2011)

हल : मान लीजिए ABC कोई समकोण त्रिभुज है जिसमें B पर समकोण है

मान लीजिए $\angle BAC = \theta$

[आकृति से]



$$\sec\theta = \frac{13}{12}$$

परन्तु $\sec\theta = \frac{AC}{AB}$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{13}{12}$$

परन्तु $\frac{AC}{AB} = \frac{13}{12} = k$ (जहाँ k आनुपातिकता स्थिरांक है।)

$AC = 13k$ और $AB = 12k$

पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर,

$AC^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

या, $(13k)^2 = (12k)^2 + (BC)^2$

या, $169k^2 = 144k^2 + (BC)^2$

या, $169k^2 - 144k^2 = (BC)^2$

या, $(BC)^2 = 25k^2$

या, $BC = \sqrt{25k^2}$

या, $BC = \pm 5k$

या, $BC = 5k$. [$BC \neq -5k$ क्योंकि भुजा ऋणात्मक नहीं हो सकती]

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}; \quad \cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}; \quad \text{cosec } \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{13k}{5k} = \frac{13}{5}$$

$$\cot\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5};$$ उत्तर।

प्रश्न 72, यदि $\pi = 180°$ हो तो मान ज्ञात करें :

$$\cos^2 0° + \tan^2 \pi/4 + \sin^4 \pi/4.$$ (M. Q., Set–II : 2011)

हल : $\cos^2 0° + \tan^2\frac{\pi}{4} + \sin^4\frac{\pi}{4} = (1)^2 + \tan^2\frac{180°}{4} + \sin^4\frac{180°}{4}$

$$= 1 + \tan^2 45° + \sin^4 45°$$

$$= 1 + (1)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$ उत्तर।

प्रश्न 73. यदि $\sin A + \cos A = 1$ तो सिद्ध करें $\cos A - \sin A = \pm 1$.

(M. Q., Set–IV : 2011, M. Q., Set–III : 2015)

हल : $\sin A + \cos A = 1$

$\sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A\cos A = 1$

$\Rightarrow 2\sin A\cos A = 1 - 1 = 0$

अब $(\cos A - \sin A)^2 = \cos^2 A + \sin^2 A - 2\cos A\sin A$

$= 1 - 2 \times 0 = 1$

$\therefore \cos A - \sin A = \pm 1$. उत्तर।

प्रश्न 74. सिद्ध करें : $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=2\sec\theta.$

(2012A, M.Q., Set–II : 2015)

हल : L.H.S. $=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{1+\sin^2\theta+2\sin\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}\quad\frac{2+2\sin\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{2(1-\sin\theta)}{\cos\ (1+\sin\theta)}=\frac{2}{\cos\theta}=2\sec\theta$

= R.H.S. Proved.

प्रश्न 75. सिद्ध करें : $\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta\,.\,\text{cosec}\theta.$

(M. Q., Set–III : 2011)

हल : L.H.S. $=\tan\theta+\cot\theta$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}$

$=\sec\theta\,.\,\text{cosec}\theta=$ R.H.S. Proved.

प्रश्न 76. मान निकालिए : $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ+\text{cosec}\,30^\circ}$

(M. Q., Set–V : 2011)

हल : $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ+\text{cosec}\,30^\circ}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+(2)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$

$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times(\sqrt{3}-1)}{4(3-1)}$

$=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$: उत्तर।

प्रश्न 77. मान निकालिए : (M. Q., Set–III : 2011)

$$\frac{5\cos^2 60^\circ+4\sec^2 30^\circ-\tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ}$$

हल : $\frac{5\cos^2 60^\circ+4\sec^2 30^\circ-\tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ}$

$\frac{5(\cos 60^\circ)^2+4(\sec 30^\circ)^2-(\tan 45^\circ)^2}{(\sin 30^\circ)^2+(\cos 30^\circ)^2}$

$\frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-(1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\frac{5}{4}+4\times\frac{4}{3}-1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\quad\frac{\frac{5}{4}+\frac{16}{3}-1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$

$\frac{5}{4}+\frac{16}{3}-1=\frac{15+64-12}{12}=\frac{67}{12}$; उत्तर।

प्रश्न 78. सिद्ध कीजिए : (M. Q., Set–V : 2011, 2014A, 2017A)

$$\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}=\sec A+\tan A$$

हल : L.H.S. $=\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}=\sqrt{\frac{1+\sin A)(1+\sin A)}{(1-\sin A)(1+\sin A)}}=\sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{(1)^2-(\sin A)^2}}$

$=\sqrt{\frac{1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}=\sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}}$

$=\frac{1+\sin A}{\cos A}=\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}=\sec A+\tan A$

∴ L.H.S. = R.H.S. Proved.

प्रश्न 79. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\text{cosec}\theta$

(M. Q., Set–V : 2011, 2017A)

हल : L.H.S. $=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\frac{\sin^2\theta+1+\cos^2\theta+2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}=\frac{1+1+2\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}=\frac{2}{\sin\theta}=2\,\text{cosec}\,\theta=$ R.H.S.

यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 80. सिद्ध कीजिए : $\frac{\cos A}{1+\sin A}+\frac{1+\sin A}{\cos A}=2\sec A.$

(2013A, 2013C)

हल : L.H.S. $=\frac{\cos A}{1+\sin A}+\frac{1+\sin A}{\cos A}=\frac{(\cos A)^2+(1+\sin A)^2}{(1+\sin A)\times(\cos A)}$

$=\frac{\cos^2 A+1+\sin^2 A+2\sin A}{(1+\sin A)\times\cos A}$

$\{\because (a+b)^2=a^2+b^2+2ab\}$

$=\frac{(\sin^2 A+\cos^2 A)+1+2\sin A}{(1+\sin A)\times\cos A}$

$=\frac{2+2\sin A}{(1+\sin A)\times\cos A}\quad(\because \cos^2 A+\sin^2 A=1)$

$=\frac{2(1+\sin A)}{(1+\sin A)\times\cos A}=\frac{2}{\cos A}=2\sec A.$ Proved.

प्रश्न 81. सिद्ध कीजिए : $\frac{1+\sec A}{\sec A}=\frac{\sin^2 A}{1-\cos A}.$

(M. Q., Set–V : 2015)

हल : L.H.S. $=\frac{1+\sec A}{\sec A}=\frac{1+\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}=1+\cos A$

R.H.S. $=\frac{\sin^2 A}{1-\cos A}=\frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A}\quad(\because 1-\cos^2 A=\sin^2 A)$

$=\frac{(1+\cos A)(1-\cos A)}{(1-\cos A)}=1+\cos A$

∴ L.H.S. = R.H.S. Proved.

प्रश्न 82. सिद्ध करें कि **(M. Q., Set–II : 2011)**

$(a \sin\theta - b\cos\theta)^2 + (a\cos + b\sin)^2 = a^2 + b^2$.

हल : L.H.S. $= (a\sin\theta - b\cos\theta)^2 + (a\cos\theta + b\sin\theta)^2$

$= a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta - 2ab\sin\theta\cos\theta$

$+ a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta$

$= a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + b^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= a^2(1) + b^2(1) = a^2 + b^2 =$ RHS. **Proved.**

प्रश्न 83. सिद्ध करें कि : **(M. Q., Set–III : 2011)**

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \text{cosec}\theta - \cot\theta.$$

हल : L.H.S. $= \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

$= \text{cosec}\theta - \cot\theta =$ R.H.S. **Proved.**

प्रश्न 84. यदि $7\tan\theta = 8$, तो $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ का मान बताइए। **(2013C)**

हल : $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$= \cot^2\theta = \frac{1}{\tan^2\theta}$

दिया हुआ है कि $\because 7\tan\theta = 8 \quad \therefore \tan\theta = \frac{8}{7}$

$\tan\theta$ का मान रखने पर, $\frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\left(\frac{8}{7}\right)^2} = \frac{49}{64}$ उत्तर।

प्रश्न 85. $2\cos^2\theta \quad \frac{2}{1+\cot^2\theta}$ का मान मालूम करें।

(M. Q., Set–IV : 2011, M.Q., Set–IV : 2016)

हल : $2\cos^2\theta + \frac{2}{1+\cot^2\theta} = 2\cos^2 + \frac{2}{\text{cosec}^2\theta}$

$= 2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta$

$= 2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2.$ उत्तर।

प्रश्न 86. सिद्ध करें : $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A) = \cos A$. **(2011C)**

हल : बायाँ पक्ष $= (\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$

$= \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)(1 - \sin A)$

$= \frac{1}{\cos A}(1+\sin A)(1-\sin A)$

$= \frac{1}{\cos A}(1 - \sin^2 A) = \frac{\cos^2 A}{\cos A}$

$= \cos A =$ दायाँ पक्ष **Proved.**

प्रश्न 87. सिद्ध करें : $\tan 9^\circ \cdot \tan 27^\circ = \cot 63^\circ \cdot \cot 81^\circ$. **(2011C)**

हल : बायाँ पक्ष $= \tan 9^\circ \cdot \tan 27^\circ$

$= \tan(90^\circ - 81^\circ) \cdot \tan(90^\circ - 63^\circ)$

$[\because 9^\circ = 90^\circ - 81^\circ$ और $27^\circ = 90^\circ - 63^\circ]$

$= \cot 81^\circ \cdot \cot 63^\circ \quad [\because \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta]$

$= \cot 63^\circ \cdot \cot 81^\circ =$ दायाँ पक्ष **Proved.**

प्रश्न 88. यदि $15\cot A = 8$, तो $\sin A$ और $\cos A$ का मान ज्ञात करें। **(2012 A)**

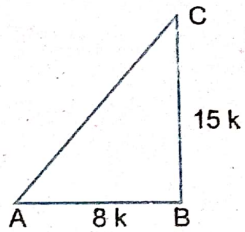
हल : मान लीजिए ABC कोई समकोण त्रिभुज है जिसमें A न्यून कोण है और B पर समकोण है।

$15\cot A = 8$

$\therefore \cot A = \frac{8}{15}$

परन्तु $\cot A = \frac{AB}{BC}$ [आकृति से]

$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{8}{15} = k$



जहाँ k आनुपातिक स्थिरांक है।

$\Rightarrow AB = 8k, BC = 15k$

पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर,

$AC^2 = (AB)^2 + (BC)^2 = (8k)^2 + (15k)^2$

$= 64k^2 + 225k^2 = 289k^2$

$AC = \sqrt{289\,k^2} = \pm 17k$

$\Rightarrow AC = 17k$

[$AC \neq -17k$, क्योंकि भुजा ऋणात्मक नहीं हो सकती]

$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}$; $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{8k}{17k} = \frac{8}{17}$

अतः $\sin A = \frac{15}{17}$ और $\cos A = \frac{8}{17}$; उत्तर।

प्रश्न 89. निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए : **(2012C)**

$(\sin A + \text{cosec } A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$.

हल : L.H.S. $= (\sin A + \text{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$

$= \sin^2 A + \text{cosec}^2 A + 2\sin A \cdot \text{cosec} A + \cos^2 A$

$+ \sec^2 A + 2\cos A \cdot \sec A$

$= 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + \cot^2 A + \tan^2 A$

$= 7 + \cot^2 A + \tan^2 A$ **Proved.**

प्रश्न 90. यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अंतःकोण हों, तो दिखाइए कि $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$. **(2012C)**

हल : $\because \Delta$ में $A + B + C = 180^\circ$

या, $\frac{B+C}{2} = 90 - \frac{A}{2}$

या, $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90 - \frac{A}{2}\right) = \cos A/2$ **Proved.**

प्रश्न 91. सिद्ध करें कि $\tan^2\phi + \cot^2\phi + 2 = \sec^2\phi \cdot \text{cosec}^2\phi$. **(2012A)**

हल : L.H.S. $= \tan^2\phi + \cot^2\phi + 2 = \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} + \frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi} + 2$

$= \frac{\sin^4\phi + \cos^4\phi + 2\sin^2\phi \cdot \cos^2\phi}{\cos^2\phi \cdot \sin^2\phi}$

$= \frac{(\sin^2\phi)^2 + (\cos^2\phi)^2 + 2\sin^2\phi \cdot \cos^2\phi}{\cos^2\phi \cdot \sin^2\phi}$

$= \frac{(\sin^2\phi + \cos^2\phi)^2}{\cos^2\phi \cdot \sin^2\phi}$

$= \frac{1}{\cos^2\phi \cdot \sin^2\phi} = \frac{1}{\cos^2\phi} \cdot \frac{1}{\sin^2\phi}$

$= \sec^2\phi \cdot \text{cosec}^2\phi$ **Proved.**

प्रश्न 92. $2\tan^2 45° + \cos^2 60° + \sin^2 60°$ का मान ज्ञात कीजिए। (2013A)

हल : $2\tan^2 45° + \cos^2 60° + \sin^2 60°$

$$= 2\times(1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{8+1+3}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ उत्तर।}$$

प्रश्न 93. यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अन्तः कोण हों, तो दिखाइए कि $\tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cot\frac{A}{2}$. (2013C)

हल : $\because A + B + C = 180° \therefore \quad \frac{A+B+C}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 90° \quad \Rightarrow \quad \frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$$

दोनों ओर tan लेने पर,

$$\tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \tan\left(90° - \frac{A}{2}\right) = \cot\frac{A}{2}$$ **Proved.**

प्रश्न 94. सिद्ध करें कि $\frac{1+\cot^2 A}{1+\tan^2 A} = \cot^2 A$. (2014A)

हल : $\text{L.H.S.} = \frac{1+\cot^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{\operatorname{cosec}^2 A}{\sec^2 A} = \frac{\frac{1}{\sin^2 A}}{\frac{1}{\cos^2 A}}$

$$= \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \cot^2 A.$$ **Proved.**

प्रश्न 95. सिद्ध करें कि $\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \operatorname{cosec} A + \cot A$. (2014C)

हल : $\text{L.H.S.} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} \times \sqrt{\frac{1+\cos A}{1+\cos A}} = \frac{1+\cos A}{\sin A}$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos A)^2}{1-\cos^2 A}} = \sqrt{\frac{(1+\cos A)^2}{\sin^2 A}}$$

$$= \frac{1}{\sin A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \operatorname{cosec} A + \cot A.$$ **Proved.**

प्रश्न 96. सिद्ध करें कि $\left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$.

(2014A, M. Q. Set–I : 2016)

हल : $\text{L.H.S.} = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{1-\frac{1}{\tan A}}\right)^2$

$$= \left(\frac{1-\tan A}{\frac{\tan A - 1}{\tan A}}\right)^2 = \left\{\frac{\tan A(1-\tan A}{-(1-\tan A)}\right\}^2$$

$$= \left\{-\frac{\tan A(1-\tan A)}{(1-\tan A)}\right\}^2 = \tan^2 A.$$ **Proved.**

प्रश्न 97. सिद्ध करें कि $\sec^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$.

हल : $\text{L.H.S.} = \sin^6\theta + \cos^6\theta = (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3$

$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^4\theta + \cos^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta)$$

$$= \{(\sin^2\theta)^2 + (\cos^2\theta)^2 + 2\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta\}$$

$$= \{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta\}$$

$$= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta = \text{R.H.S.}$$ **Proved.**

प्रश्न 98. यदि $\cos\theta + \sin\theta = 1$ तो सिद्ध करें कि $\cos\theta - \sin\theta = \pm 1$. (M. Q. Set–III : 2015)

हल : $\cos\theta + \sin\theta = 1$ ...(i)

$\cos\theta - \sin\theta = x$ ...(ii)

(i) और (ii) को वर्ग कर जोड़ने पर,

$$(\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2 = 1 + x^2$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta\,.\,\sin\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\cos\theta\,.\,\sin\theta = 1 + x^2$$

$$\Rightarrow 1 + 1 = 1 + x^2 \qquad \therefore \quad x^2 = 1$$

$\therefore \quad x = \pm 1.$ या, $\cos\theta - \sin\theta = \pm 1$. **Proved.**

प्रश्न 99. सिद्ध करें : $\frac{\sin^4\theta - \cos^4\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} = 1$

(M. Q. Set–III : 2015, 2015A)

हल :

$$\text{L.H.S.} = \frac{(\sin^2\theta)^2 - (\cos^2\theta)^2}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$$

$$= \frac{(\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{(\sin^2\theta - \cos^2\theta)}$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$ **Proved.**

प्रश्न 100. सिद्ध कीजिए : $\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \operatorname{cosec} A - \cot A$. (2014C)

हल : $\text{L.H.S.} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \times \sqrt{\frac{1-\cos A}{1-\cos A}} = \sqrt{\frac{(1-\cos A)^2}{1-\cos^2 A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos A)^2}{\sin^2 A}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin A} - \frac{\cos A}{\sin A}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(\operatorname{cosec} A - \cot A)^2} = \operatorname{cosec} A - \cot A.$$ **Proved.**

प्रश्न 101. सिद्ध करें कि $\left(\frac{1-\cot A}{1-\tan A}\right)^2 = \cot^2 A$. (2014C)

हल : $\text{L.H.S.} = \left(\frac{1-\cot A}{1-\tan A}\right)^2 = \left(\frac{1-\frac{\cos A}{\sin A}}{1-\frac{\sin A}{\cos A}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}}{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}}\right)^2$

$$= \left(\frac{\sin A - \cos A}{\sin A} \times \frac{\cos A}{\cos A - \sin A}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sin A - \cos A}{\sin A} \times \frac{\cos A}{(\sin A - \cos A)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\cos A}{\sin A}\right)^2 = \cot^2 A.$$ **Proved.**

प्रश्न 102. $\sin(90^\circ-\theta)$ का त्रिकोणमितीय अनुपात ज्यामितीय विधि से निकालें। (M. Q. Set–IV : 2015)

हल : माना कि ABC एक समकोण Δ है,

$\angle B = 90^\circ$ तथा $\angle C = \theta$

$\therefore \angle A = 90^\circ - \theta$

$\therefore \sin\theta = \frac{AB}{AC}$ ... (i)

$\therefore \cos(90^\circ-\theta) = \frac{AB}{AC}$ ... (ii)

(i) = (ii) से, $\cos(90^\circ-\theta) = \sin\theta$. Proved.

प्रश्न 103. सिद्ध करें : $(\sec\theta - \tan\theta)^2 = \frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$

(M. Q. Set–IV : 2015, 2015A, 2015C)

हल : L.H.S. $= (\sec\theta - \tan\theta)^2 = \left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$

$$\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = \frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$= \left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \frac{1-\sin}{1+\sin}$$. Proved.

प्रश्न 104. दिखाइए कि $\tan 48^\circ \cdot \tan 23^\circ \cdot \tan 42^\circ \cdot \tan 67^\circ = 1$.

(M. Q. Set–V : 2015)

हल : L.H.S. $= \tan 48^\circ . \tan 23^\circ . \tan 42^\circ . \tan 67^\circ$

$= \tan(90^\circ - 42^\circ) . \tan 23^\circ . \tan(90^\circ - 23^\circ) . \tan 42^\circ$

$= \cot 42^\circ . \tan 42^\circ . \tan 23^\circ . \cot 23^\circ = 1$. Proved.

प्रश्न 105. यदि $\pi = 180^\circ$, तो $\sin^2\frac{\pi}{3} + \tan^2\frac{\pi}{6} - \cos^2\frac{\pi}{2}$ का मान निकालें। (2015A)

हल : $\sin^2\frac{\pi}{3} + \tan^2\frac{\pi}{6} - \cos^2\frac{\pi}{2} = \sin^2 60^\circ + \tan^2 30^\circ - \cos^2 90^\circ$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - (0)^2$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{9+4}{12} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{2}$$ उत्तर।

प्रश्न 106. सिद्ध कीजिए कि $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta . \sin^2\theta$.

(2015C)

हल : L.H.S. $= \tan^2\theta - \sin^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta$

$$= \frac{\sin^2\theta - \sin^2\theta . \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta\,(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta . \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} . \sin^2\theta$$

$= \tan^2\theta \cdot \sin^2\theta$. Proved.

प्रश्न 107. सिद्ध कीजिए कि $(\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2 = 2$.

(2015A)

हल : L.H.S. $= (\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta . \sin\theta$

$+ \cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\cos\theta . \sin\theta$

$= 2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta = 2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= 2 \times 1 = 2$. Proved.

प्रश्न 108. सिद्ध करें : $\sec A\,(1-\sin A)\,(\sec A + \tan A) = 1$

(M. Q., Set–I : 2016)

हल : L.H.S. $= \sec A\,(1-\sin A)\,(\sec A + \tan A)$

$$= \sec A\,(1-\sin A)\left(\sec A + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \sec A\,(1-\sin A)\left(\frac{\sec A . \cos A + \sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \sec A\,(1-\sin A)\left(\frac{1+\sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \sec A\,(1-\sin A)\,(1+\sin A) \times \frac{1}{\cos A}$$

$$= \sec A\{(1)^2 - (\sin A)^2\} \times \frac{1}{\cos A}$$

$$= \sec A(1-\sin^2 A).\frac{1}{\cos A} = \sec A . \cos^2 A . \frac{1}{\cos A}$$

$= \sec A . \cos A = 1$ Proved.

प्रश्न 109. सिद्ध करें :

$(1 + \tan\theta + \sec\theta)\,(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta) = 2$.

हल : $\left(1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\right)$

$$= \frac{(\cos\theta + \sin\theta + 1)}{\cos\theta} \times \frac{(\sin\theta + \cos\theta - 1)}{\sin\theta}$$

$$= \frac{(\cos\theta + \sin\theta)^2 - 1}{\cos\theta . \sin\theta}$$

$$= \frac{1 + 2\cos\theta . \sin\theta - 1}{\cos\theta . \sin\theta} = \frac{2\sin\theta . \cos\theta}{\sin\theta . \cos\theta} = 2.$$ Proved.

प्रश्न 110. सिद्ध करें : $\frac{1+\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{1-\cos A} = 2\operatorname{cosec} A$.

(M. Q., Set–II : 2016)

हल : L.H.S $= \frac{1+\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{(1+\cos A)^2 + \sin^2 A}{\sin A(1+\cos A)}$

$$= \frac{1 + \cos^2 A + 2\cos A + \sin^2 A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$= \frac{1 + (\cos^2 A + \sin^2 A) + 2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$= \frac{1+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)} = \frac{2+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$= \frac{2(1+\cos A)}{\sin A(1+\cos A)} = \frac{2}{\sin A} = 2\operatorname{cosec} A.$$ Proved.

प्रश्न 111. सिद्ध करें : $\frac{\sin\theta}{\sin(90-\theta)} + \frac{\cos\theta}{\cos(90-\theta)} = \sec\theta . \operatorname{cosec}\theta$.

(M. Q., Set–II : 2016)

हल : L.H.S $= \frac{\sin\theta}{\sin(90^\circ-\theta)} + \frac{\cos\theta}{\cos(90^\circ-\theta)}$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta . \sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta . \sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta} . \frac{1}{\sin\theta}$$

$= \sec\theta . \operatorname{cosec}\theta$ Proved.

प्रश्न 112. सिद्ध करें : $\frac{3-4\sin^2\phi}{\cos^2\phi} = 3-\tan^2\phi.$

(M. Q., Set–V : 2016)

हल : L.H.S = $\frac{3-4\sin^2\phi}{\cos^2\phi} = \frac{3}{\cos^2\phi} - \frac{4\sin^2\phi}{\cos^2\phi}$

$= 3\sec^2\phi - 4\tan^2\phi = 3(1+\tan^2\phi) - 4\tan^2\phi$

$= 3 + 3\tan^2\phi - 4\tan^2\phi = 3 - \tan^2\phi$. Proved.

प्रश्न 113. सिद्ध करें : $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A.$ (2016A)

हल : L.H.S. $= \frac{\cos A}{1\ \sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{\cos^2 A + (1+\sin A)^2}{\cos A(1+\sin A)}$

$= \frac{\cos^2 A + 1 + \sin^2 A + 2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$

$= \frac{(\cos^2 A + \sin^2 A) + 1 + 2\sin A}{\cos A(1+\sin A)} = \frac{1+1+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$

$= \frac{2+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)} = \frac{2(1+\sin A)}{\cos A(1+\sin A)}$

$= \frac{2}{\cos A} = 2\sec A.$ Proved.

प्रश्न 114. यदि $\sec\phi = \frac{13}{12}$ तो $\tan\phi + \cot\phi$ का मान निकालें।

(M. Q., Set–V : 2016)

हल : $\sec\phi = \frac{13}{12}$; $\sec^2\phi = \frac{169}{144}$

$\Rightarrow 1 + \tan^2\phi = \frac{169}{144}$

$\Rightarrow \tan^2\phi = \frac{169}{144} - 1 = \frac{169-144}{144} = \frac{25}{144}$

$\therefore \tan\phi = \sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{5}{12}$

$\cot\phi = \frac{1}{\tan\phi} = \frac{1}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{5}$

$\tan\phi + \cot\phi = \frac{5}{12} + \frac{12}{5} = \frac{25+144}{60} = \frac{169}{60} = 2\frac{49}{60}$. उत्तर।

प्रश्न 115. सिद्ध करें कि $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta.$ (2016A)

हल : L.H.S.= $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \frac{\sin\theta(1-2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$= \frac{\sin\theta(1-2\sin^2\theta)}{\cos\theta\{2(1-\sin^2\theta)-1\}} = \frac{\sin\theta(1-2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2-2\sin^2\theta-1)}$

$= \frac{\sin\theta(1-2\sin^2\theta)}{\cos\theta(1-2\sin^2\theta)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta.$ Proved.

प्रश्न 116. यदि $\cot\theta = \frac{7}{8}$ हो, तो $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ मान निकालें। (2016A)

हल : $\cot\theta = \frac{7}{8}$, तो $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}$

[$\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$]

$= \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$. उत्तर।

प्रश्न 117. सिद्ध करें कि : $\frac{\cot\theta - \cos\theta}{\cot\theta + \cos\theta} = \frac{\text{cosec}\theta - 1}{\text{cosec}\theta + 1}.$ (2016A)

हल : L.H.S. = $\frac{\cot\theta - \cos\theta}{\cot\theta + \cos\theta}$

$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \cos\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \cos\theta} = \frac{\cos\theta\left(\frac{1}{\sin\theta} - 1\right)}{\cos\theta\left(\frac{1}{\sin\theta} + 1\right)}$

$= \frac{\frac{1}{\sin\theta} - 1}{\frac{1}{\sin\theta} + 1} = \frac{\text{cosec}\theta - 1}{\text{cosec}\theta + 1}$ Proved.

प्रश्न 118. दिखाएँ कि $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$. (2016C)

हल : L.H.S.= $(\cos 38^\circ . \cos 52^\circ - \sin 38^\circ . \sin 52^\circ$

$= \cos(90^\circ - 52^\circ) . \cos(90^\circ - 38^\circ) - \sin 38^\circ . \sin 52^\circ$

$= \sin 52^\circ . \sin 38^\circ - \sin 38^\circ . \sin 52^\circ = 0$. Proved.

प्रश्न 119. सिद्ध करें : $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\text{cosec}A - 1}{\text{cosec}A + 1}.$ (2016C)

हल : L. H. S. = $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$

$= \frac{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\text{cosec}A - 1}{\text{cosec}A + 1}$. Proved.

प्रश्न 120. सिद्ध करें : $(\text{cosec}\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}.$ (2017A)

हल : L.H.S. $= (\text{cosec}\,\theta - \cot\,\theta)^2 = \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$

$= \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$

$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} = \frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$. Proved.

प्रश्न 121. यदि $\tan(A+B)=\sqrt{3}$ और $\tan(A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $0<A+B<90°$, $A>B$. तो A और B का मान ज्ञात करें। (2017A)

हल : $\tan(A+B)=\sqrt{3}=\tan 60°$

$\therefore A+B=60°$ ...(i)

$\tan(A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30°$

$\therefore A-B=30°$ ...(ii)

समीकरण (i) और (ii) से,

$A+B = 60$

$A-B = 30$

$2A = 90$

$A=\frac{90}{2}=45$

$A+B=60° \Rightarrow 45°+B=60°$

$\therefore B=60°-45°=15°$ $\therefore A=45°;\ B=15°$. उत्तर।

वृत्त

प्रश्न 1. किसी भी वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं? (2013A)

हल : अनन्त।

प्रश्न 2. वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को क्या कहते हैं? (M. Q., Set–II : 2011)

हल : स्पर्श बिन्दु।

प्रश्न 3. बिन्दु O से एक वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 24 cm तथा केन्द्र से दूरी 25 cm है तो वृत्त के त्रिज्या की लम्बाई क्या होगी? (M. Q., Set–I : 2011)

हल : 7 cm.

संकेत : $\sqrt{25^2-24^2}=\sqrt{625-576}=\sqrt{49}=7$ cm

प्रश्न 4. किसी वृत्त के बाह्य बिन्दु P से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ AP और PB खींची गई है, जिसमें PA की लम्बाई 6 cm है, तो PB की लम्बाई कितनी होगी? (M. Q., Set–III : 2011)

हल : दोनों स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ समान होती हैं

$\therefore$ PB की लम्बाई = PA की लम्बाई = 6 cm. उत्तर।

प्रश्न 5. किसी वृत्त के बाह्य बिन्दु P से खींची गई स्पर्श रेखा PQ की लम्बाई 10 cm है, तो P बिन्दु से वृत्त पर खींची गई दूसरी स्पर्श रेखा PR की लम्बाई ज्ञात करें। (2011C)

हल : हम जानते हैं कि वृत्त के बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती हैं।

$\therefore$ PQ की लम्बाई = PR की लम्बाई = 10 सेमी. उत्तर।

प्रश्न 6. O केन्द्र वाले वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु P से खींची गई स्पर्श रेखायें PA एवं PB हैं। यदि $\angle APO=30°$ तो $\angle AOB$ का मान क्या होगा? (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : $\angle APO=\angle BPO$

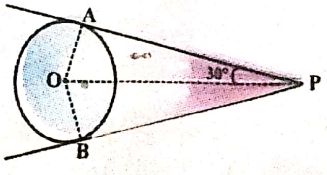
ΔOAP में,

$\angle AOP=90°-30°=60°$

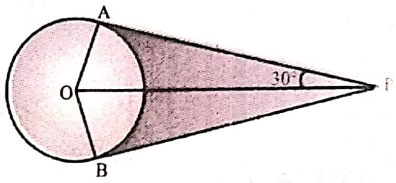
$\angle OBP$ में,

$\angle BOP=90°-30°=60°$

$\therefore \angle AOB=120°$. उत्तर।



प्रश्न 7. बगल के चित्र में PA और PB वृत्त की स्पर्श रेखा है तथा $\angle APO=30°$ तो $\angle AOB=?$ (M. Q., Set–II : 2015)



हल : $\because \angle APO=30°$

$\because$ OA ⊥ AP पर,

$\therefore \angle OAP=90°=\angle OBP$

$\therefore \angle AOP=180°-(90°+30°)=\angle BOP$

$\therefore \angle AOB=60°+60°=120°$ उत्तर।

प्रश्न 8. किसी वृत्त के केन्द्र से 5 सेमी दूर स्थित बिन्दु A से खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई 4 सेमी है, तो वृत्त की त्रिज्या निकालें। (2015A, 2016C

हल : एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। बाह्य बिंदु A से स्पर्श [illegible]। PA लंबाई 4 cm तथा A की केन्द्र O से दूरी 5 cm है।

$\therefore \angle APO=90°$

अब, समकोण ΔOPA में,

$OA^2=PA^2+OP^2$

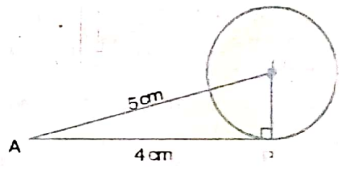
$(5)^2=(4)^2+OP^2$

या, $25=16+OP^2$

या, $OP^2=25-16$

या, $OP^2=9=(3)^2$

या, OP = 3 cm; उत्तर।



प्रश्न 9. दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 10 सेमी और 6 सेमी हैं। बड़े वृत्त (बाहरी) की जीवा की लम्बाई निकालें जो छोटे (आंतरिक) वृत्त को स्पर्श करती है। (2015A)

हल : माना कि O केन्द्र वाले दो संकेन्द्रीय वृत्त C_1 तथा C_2 [illegible] वृत्त C_1 की जीवा AB जो छोटे वृत्त को P पर स्पर्श करती है।

OP = 6 cm. तथा OB = 10 cm दिया हुआ है।

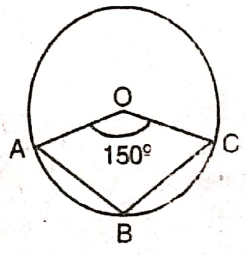
समकोण Δ OPB में,

$PB=\sqrt{OB^2-OP^2}=\sqrt{(10)^2-(6)^2}$

$=\sqrt{(10+6)(10-6)}=\sqrt{16\times 4}=\sqrt{64}=8$ cm

$AB=2\times PB=2\times 8=16$ cm. उत्तर।

प्रश्न 10. आकृति में O वृत्त का केन्द्र है यदि $\angle AOC=150°$ हो तो $\angle ABC$ का मान निकालें।



हल : $\angle ABC=\frac{\angle AOC}{2}=\frac{150°}{2}=75°$ उत्तर।

प्रश्न 11. वृत्त में रेखा AB और CD परस्पर बिन्दु E पर कटती है यदि AE = 3cm, BE = 6 cm और CE = 2cm तो CD का मान निकालें।
(M. Q., Set–IV : 2015)

हल : $\Delta AEC \sim \Delta BED$

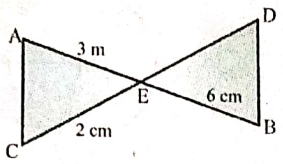
$\therefore \quad \frac{3}{2} = \frac{x}{6}$

$\Rightarrow \quad 2x = 18$

$\therefore \quad x = 9$

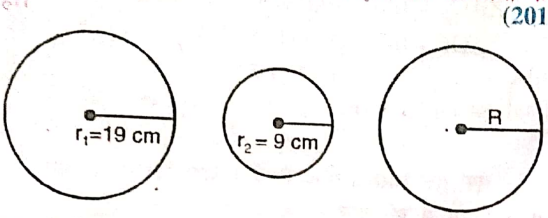
$\therefore \quad CD = CE + ED$

$= 2 + 9 = 11$ cm. उत्तर।



प्रश्न 12. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 19 सेमी और 9 सेमी हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि इन दोनों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर हो।
(2013A)

हल :



पहले वृत्त की त्रिज्या $(r_1) = 19$ cm

दूसरे वृत्त की त्रिज्या $(r_2) = 9$ cm

मान लीजिए तीसरे वृत्त की त्रिज्या = R cm

प्रश्न के अनुसार,

पहले वृत्त की परिधि + दूसरे वृत्त की परिधि = तीसरे वृत्त की परिधि

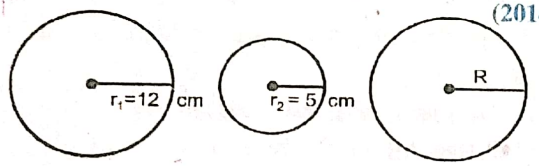
$2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 2\pi R; \qquad 2\pi [r_1 + r_2] = 2\pi R$

$19 + 9 = R \qquad \therefore \quad R = 28$

$\therefore$ तीसरे वृत्त की त्रिज्या (R) = 28 cm; उत्तर।

प्रश्न 13. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 12 सेमी तथा 5 सेमी है। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि इन दोनों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है।
(2014C)

हल :



पहले वृत्त की त्रिज्या $(r_1) = 12$ cm

दूसरे वृत्त की त्रिज्या $(r_2) = 5$ cm

मान लिया कि तीसरे वृत्त की त्रिज्या = R cm.

प्रश्नानुसार,

पहले वृत्त की परिधि + दूसरे वृत्त की परिधि = तीसरे वृत्त की परिधि

$2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 2\pi R; \qquad 2\pi (r_1 + r_2) = 2\pi R$

$\therefore \quad r_1 + r_2 = R; \qquad 12 + 5 = R$

$\therefore \quad R = 17$ cm

अतः तीसरे वृत्त की त्रिज्या (R) = 17 cm उत्तर।

प्रश्न 14. एक बिन्दु A से, जो वृत्त के केन्द्र से 10 cm दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 8 cm है, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
(2014A)

हल : समकोण ΔAOB में,

$OA^2 = AB^2 + OB^2$

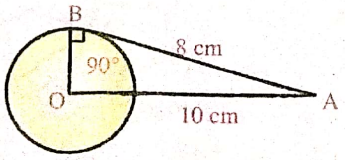
$(10)^2 = (8)^2 + OB^2$

$100 = 64 + OB^2$

$\Rightarrow \quad 100 - 64 = OB^2$

$OB^2 = 36$

$\therefore \quad OB = \sqrt{36} = 6$ cm. उत्तर।



प्रश्न 15. एक बिन्दु A से, जो एक वृत्त के केन्द्र से 5 सेमी. दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 3 सेमी. है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
(2014A)

हल : समकोण ΔAOB में,

$OA^2 = AB^2 + OB^2$

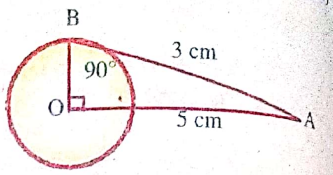
या, $(5)^2 = (3)^2 + OB^2$

या, $25 = 9 + OB^2$

$\Rightarrow \quad 25 - 9 = OB^2$

$OB^2 = 16$

$\therefore \quad OB = \sqrt{16} = 4$ cm. उत्तर।



प्रश्न 16. एक बिन्दु A से, जो एक वृत्त के केन्द्र से 10 सेमी दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 6 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
(2014C)

हल : एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। बाह्य बिन्दु A से स्पर्श रेखा PA की लम्बाई 6 cm तथा A की केन्द्र से दूरी 10 cm है।

$\because \quad \angle APO = 90°$ (स्पर्श रेखा, त्रिज्या पर लम्ब होती है)

समकोण ΔOPA में,

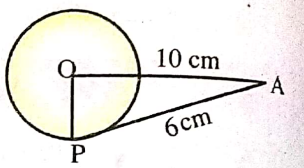
$OA^2 = OP^2 + PA^2$

$\therefore \quad OP^2 = OA^2 - PA^2$

$= (10)^2 - (6)^2$

$= 100 - 36 = 64$

$\therefore \quad OP = \sqrt{64} = 8$ cm उत्तर।



प्रश्न 17. एक बिंदु Q से एक वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 24 cm तथा Q की केंद्र से दूरी 25 cm है। वृत्त की त्रिज्या क्या होगी ?
(M. Q., Set–V : 2011, M. Q. Set–IV : 2015, M. Q. Set–I : 2016, 2016A)

हल : एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। बाह्य बिंदु Q से स्पर्श रेखा PQ की लंबाई 24 cm तथा Q की केन्द्र O से दूरी 25 cm है।

$\therefore \quad \angle QPO = 90°$

अब, समकोण ΔOPQ में,

$OQ^2 = PQ^2 + OP^2$

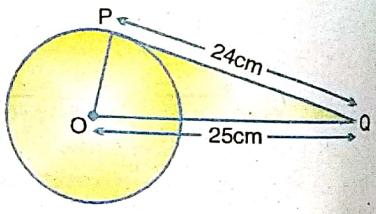
$(25)^2 = (24)^2 + OP^2$

या, $625 = 576 + OP^2$

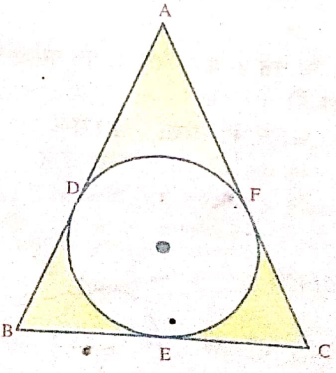
या, $OP^2 = 625 - 576$

या, $OP^2 = 49 = (7)^2$

या, OP = 7 cm; उत्तर।



प्रश्न 18. त्रिभुज ABC के अन्दर एक वृत्त है जो भुजा AB, BC और AC को क्रमशः बिन्दु D, E और F पर स्पर्श करती है। अगर AC = 12 सेमी, BC = 8 सेमी और AC = 10 सेमी हो तो AD, BE और CF की लम्बाई ज्ञात करें।
(2017A)



हल: ΔABC का अंतः वृत्त खींचा गया है और BC = 8 cm., AC = 1 cm और AB = 12 cm.

मान लिया कि AD = AF = x, BD = BE = y और CE = CF = z

अब, AB = 12 cm

⇒ AD + DB = 12 cm ⇒ x + y = 12 cm ... (i)

इसी प्रकार, y + z = 8 cm ... (ii)

और x + z = 10 cm ... (iii)

(i) + (ii) + (iii)

2 (x + y + z) = 30 ∴ x + y + z = 15 ... (iv)

x + y के मान रखने पर,

12 + z = 15 ∴ z = 15 – 12 = 3

(ii) और (iii) में z के मान रखने पर,

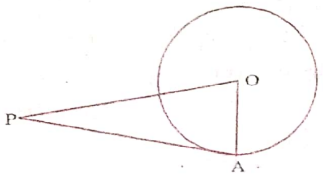
y + 3 = 8 ∴ y = 8 – 3 = 5

x + 3 = 10 ∴ x = 10 – 3 = 7

∴ y = 5, x = 7, z = 3

∴ AD = 7 cm, BE = 5 cm और CF = 3 cm. उत्तर।

प्रश्न 19. चित्र में OP का मान ज्ञात करें यदि स्पर्श रेखा PA = 12 cm और OA = 5 cm है। (2017A)



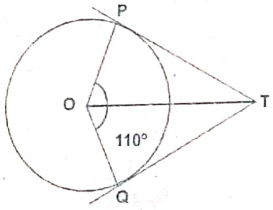
हल : PA स्पर्श रेखा है, ∠OAP = 90°

∴ समकोण Δ OPA में,

$OP^2 = PA^2 + OA^2 = (12)^2 + (5)^2 = 144 + 25 = 169$

∴ $OP = \sqrt{169} = 13$ cm. उत्तर।

प्रश्न 20. चित्र में TP, TQ केन्द्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ हैं जिनमें ∠ POQ = 110° तो ∠ PTQ का मान ज्ञात करें। (2011C)



हल : ∠P = 90° (त्रिज्या तथा ∠Q = 90° स्पर्श रेखा)

परन्तु, ∠P + ∠O + ∠Q + ∠T = 360°

90° + 110 + 90° + ∠T = 360°

∠T = 360 – 290° = 70°

∴ ∠PTQ = 70° उत्तर।

वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

प्रश्न 1. किसी वृत्त की त्रिज्या 7 cm है। तो उसका क्षेत्रफल कितना होगा? (M. Q., Set–III : 2011)

हल : वृत्त का क्षेत्रफल = π (त्रिज्या)²

∴ $\pi \times 7^2 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 154$ वर्ग सेमी. उत्तर।

प्रश्न 2. एक पहिए का व्यास 4 cm है तो 400 चक्करों में वह कितनी दूरी तय करेगी? (M. Q., Set–II : 2011)

हल : 1600π

संकेत : त्रिज्या $r = \frac{4}{2} = 2$; परिधि = 2πr

एक चक्कर में चली गयी दूरी = 2π × 2 = 4π

∴ 400 चक्कर में चली गयी दूर = 400 × 4π = 1600π. उत्तर।

प्रश्न 3. x त्रिज्या वाले वृत्त और x भुजा वाले वर्ग के क्षेत्रफलों का अनुपात निकालें। (M. Q., Set–I : 2011)

हल : x त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल = πx^2

x भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल = x^2

क्षेत्रफलों का अनुपात = π : 1. उत्तर।

प्रश्न 4. 7 सेमी० त्रिज्या वाले अर्धवृत्त की परिधि बतावें। (2016C)

हल : वृत्त की अर्धपरिधि = π r + 2r = r (π + 2)

$= 7\left(\frac{22}{7} + 2\right) = 7\left(\frac{22+14}{7}\right) = 36$ सेमी० उत्तर।

प्रश्न 5. 6 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल निकालें जिसका केन्द्रीय कोण 30° है। (2011C)

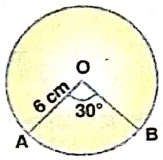
हल : वृत्त के त्रिज्यखंड की त्रिज्या (R) = 6 cm

केन्द्रीय कोण (θ) = 30°

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$= \frac{\pi R^2 \theta}{360} = \frac{22}{7} \times \frac{6 \times 6 \times 30}{360}$

$= \frac{66}{7} = 9.43 \text{ cm}^2$ उत्तर।



प्रश्न 6. किसी वृत्ताकार समान चौड़ाई वाले रास्ते का बाहरी घेरा 20π मी० और भीतरी घेरा 18π मी० है तो रास्ते की चौड़ाई निकालें। (M. Q., Set–I : 2016)

हल : बाहरी वृत्त की परिधि = $2\pi r_2$

$20\pi = 2\pi r_2$ ∴ $r_2 = \frac{20\pi}{2\pi} = 10$ मी०

भीतरी वृत्त की परिधि = $2\pi r_1$; $18\pi = 2\pi r_1$

∴ $r_1 = \frac{18\pi}{2\pi} = 9$ मी०

∴ रास्ता की चौड़ाई = $(r_2 - r_1) = (10 - 9)$ मी० = 1 मी० उत्तर।

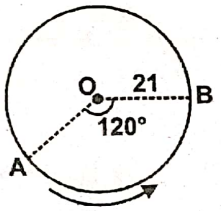
प्रश्न 7. 42 cm व्यास वाले त्रिज्यखण्ड का कोण 120° है तो त्रिज्यखण्ड का परिमाप प्राप्त करें। (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : त्रिज्यखण्ड AB की परिधि

$= \frac{120°}{360°} \times 2\pi \times 21$

$= \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 3 \times 7$

= 44 cm.



प्रश्न 8. यदि एक वृत्त के क्षेत्रफल और परिधि का मान समान है, तो वृत्त की त्रिज्या क्या होगी? (2015A, 2017A)

हल : वृत्त की परिधि = वृत्त का क्षेत्रफल

$2\pi R = \pi R^2$; $2R = R^2$

⇒ R = 2 ∴ R = 2 मात्रक; उत्तर।

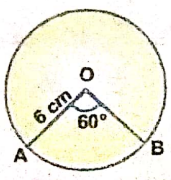
प्रश्न 9. एक 6 cm त्रिज्या वाले त्रिज्यखंड का परिमाप निकालें यदि त्रिज्यखंड का कोण 60° है। (M. Q., Set–II & V : 2015)

हल : त्रिज्यखंड की परिमाप = $2r + \frac{\pi r \theta}{180°}$

$= 2 \times 6 + \frac{22 \times 6 \times 60}{7 \times 180}$

$= 12 + \frac{132}{21} = 12 + \frac{44}{7}$

= 22 + 6.28 = 28.28 cm.; उत्तर।



ALWAYS READ BBD BOOKS

प्रश्न 10. किसी वलय की बाहरी त्रिज्या 4 cm और भीतरी त्रिज्या 3 cm हो तो उसका क्षेत्रफल निकालें। (M. Q., Set–II : 2015)

अथवा, किसी वलय की भीतरी और बाहरी त्रिज्याएँ क्रमशः 3 सेमी० और 4 सेमी० है तो उसका क्षेत्रफल निकालें $\pi = \frac{22}{7}$. (2016C)

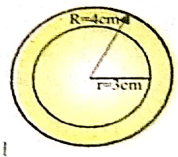
हल : वलय का क्षे० $= \pi R^2 - \pi r^2$

$= \pi(R^2 - r^2)$

$= \pi(4^2 - 3^2)$

$= \pi(16 - 9)$

$= 7\pi \text{ cm}^2 = 22 \text{ cm}^2$. उत्तर।



प्रश्न 11. किसी वृत्त का क्षेत्रफल निकालें यदि उसकी परिधि 22 सेमी० है। (M. Q., Set–III : 2015)

हल : $C = 22 \quad \Rightarrow \quad 2\pi r = 22$

$\Rightarrow \quad 2 \times \frac{22}{7} r = 22 \quad \Rightarrow \quad 2 \times 22r = 7 \times 22$

$\therefore \quad r = \frac{7}{2} \text{ cm}$

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{77}{2} \text{ cm}^2$. उत्तर।

प्रश्न 12. एक वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात करें, जिसकी परिधि 44 सेमी० है। (2012A)

हल : वृत्त की परिधि = 44 सेमी०; $2\pi r = 44$

$\therefore \quad r = \frac{44}{2\pi} = \frac{44 \times 7}{2 \times 22} = 7$ सेमी०; केन्द्रीय कोण (चतुर्थांश) $\theta = 90°$

$\therefore$ चतुर्थांश का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \theta}{360} = \frac{22 \times 7 \times 7 \times 90}{7 \times 360}$

$= \frac{11 \times 7}{2} = \frac{77}{2}$ सेमी०$= 38.5$ सेमी०^2 उत्तर।

प्रश्न 13. 66 सेमी परिधि वाले वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात करें। (2012C)

हल : वृत्त की परिधि = 66 सेमी

या, $2\pi r = 66$ सेमी या, $2 \times \frac{22}{7} \times r = 66$

$\therefore \quad r = 10.5$ सेमी

वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times (10.5)^2$

$= 86.625 \text{ (सेमी)}^2$ उत्तर।

प्रश्न 14. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8 cm तथा 6 cm हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि इन दोनों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है। (2014A)

हल : पहले वृत्त की परिधि $= 2\pi r = 2\pi \times 8 = 16\pi$ cm.

दूसरे वृत्त की परिधि $= 2\pi r = 2\pi \times 6 = 12\pi$ cm.

दोनों परिधियों का योग $= (16\pi + 12\pi) = 28\pi$ cm.

माना कि तीसरे वृत्त की त्रिज्या = R

$\therefore$ परिधि $= 2\pi R$; $\quad 28\pi = 2\pi R$

$\therefore \quad R = \frac{28\pi}{2\pi} = 14$ cm. उत्तर।

प्रश्न 15. एक अर्द्धवृत्ताकार खेत की परिमिति निकालें, यदि व्यास 24 सेमी० हो। (M. Q., Set–V : 2016)

हल : अर्द्धवृत्ताकार खेत की परिमिति $= \pi r + d = \frac{22}{7} \times 12 + 24$

$= \frac{264}{7} + 24 = \frac{264 + 168}{7} = \frac{432}{7}$

$= 61.714$ cm उत्तर।

प्रश्न 16. एक वृत्त के चतुर्थांश (quadrant) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 22 cm है। (2011A, M. Q., Set–I : 2016)

हल : वृत्त की परिधि = 22 cm या, $2\pi R = 22$ cm

$\therefore \quad R = \frac{22 \times 7}{2 \times 22} = \frac{7}{2}$ cm

केन्द्रीय कोण [चतुर्थांश] $(\theta) = 90°$

$\therefore$ चतुर्थांश का क्षेत्रफल $= \frac{\pi R^2 \theta}{360} = \frac{\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 90}{360}$

$= \frac{77}{8} \text{ cm}^2 = 9.625 \text{ cm}^2$; उत्तर।

प्रश्न 17. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 14 cm तथा 7 cm हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि इन दोनों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है। (2014A)

हल : पहले वृत्त की परिधि $= 2\pi r = 2\pi \times 14 = 28\pi$ cm.

दूसरे वृत्त की परिधि $= 2\pi r = 2\pi \times 7 = 14\pi$ cm.

दोनों परिधियों का योग $= 28\pi + 14\pi = 42\pi$ cm.

माना कि तीसरे वृत्त की त्रिज्या = R

$\therefore$ परिधि $= 2\pi R$; $\quad 42\pi = 2\pi R$

$\therefore \quad R = \frac{42\pi}{2\pi} = 21$ cm. उत्तर।

प्रश्न 18. 6 सेमी० त्रिज्या वाले एक वृत्त में एक चाप केन्द्र पर 60° का कोण बनाता है। त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल निकालें। (2015C)

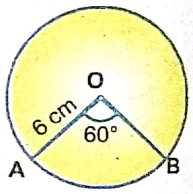
हल : वृत्त के त्रिज्यखंड की त्रिज्या (R) = 6 cm

केन्द्रीय कोण $(\theta) = 60°$

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{R^2}{360}$

$= \frac{22}{7} \times \frac{6 \times 6 \times 60}{360}$

$= \frac{22}{7} \times \frac{2160}{360} = 18.857 \text{ cm}^2$. उत्तर।



प्रश्न 19. अर्द्ध वृत्ताकार खेत की परिमाप 36 सेमी. है तो उसका व्यास निकालें। (M. Q., Set–IV : 2016)

हल : $\pi r + 2r =$ अर्द्ध वृत्ताकार खेत की परिमाप $r(\pi + 2) = 36$

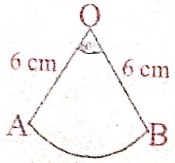
$\Rightarrow \quad r\left(\frac{22}{7} + 2\right) = 36 \quad \Rightarrow \quad r\left(\frac{22 + 14}{7}\right) = 36$

$\Rightarrow \quad r \times \frac{36}{7} = 36 \quad \therefore \quad r = 7$ cm

$\therefore \quad d = 2r = 2 \times 7 = 14$ cm उत्तर।

प्रश्न 20. 6 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के त्रिज्यखण्ड के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका कोण 60° है। (2016A)

हल : त्रिज्यखण्ड OAB का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

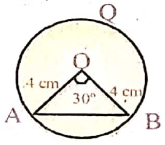


$= \frac{60}{360} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6$

$= \frac{132}{7} = 18.857 \text{ cm}^2$. उत्तर।

प्रश्न 21. त्रिज्या 4 सेमी वाले एक वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करें, जिसका कोण 30° है। साथ ही, संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल भी ज्ञात करें। (2016A)

हल : त्रिज्यखंड (OAB) का क्षे० $= \frac{\pi r^2\theta}{360^\circ} = \frac{22\times4\times4\times30}{7\times360} = \frac{88}{21}$
$= 4.19 \text{ cm}^3.$



दीर्घ वृत्त का क्षे० $= \pi r^2 = \frac{22}{7}\times4\times4$
$= \frac{352}{7} = 50.28 \text{ cm}^2$

दीर्घ त्रिज्यखंड OAQB का क्षे०
= वृत्त का क्षे० – लघु त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल
$= 50.28 - 4.19 = 46.09 \text{ cm}^3.$ उत्तर।

प्रश्न 22. एक साइकिल 5,000 चक्करों में 11 किमी० की दूरी तय करती है। पहिये का व्यास ज्ञात करें। (2012A)

हल : दूरी = 11 किमी = 11,000 मी०

एक चक्कर में तय दूरी $= \frac{11000}{5000}$ मी० $= \frac{11}{5}$ मी०

अब $2\pi r = \frac{11}{5} \Rightarrow 2\times\frac{22}{7}\times r = \frac{11}{5}$

$\therefore \quad r = \frac{11\times7}{5\times2\times22} = \frac{7}{20}$ मी०

$\therefore$ पहिए का व्यास (D) $= 2r = 2\times\frac{7}{20} = \frac{7}{10}$ मी०

$= \frac{7}{10}\times100 = 70$ सेमी० उत्तर।

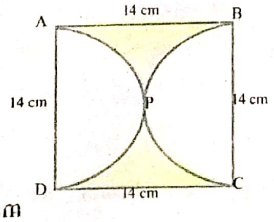
प्रश्न 23. एक वृत्त की परिधि 88 सेमी० है। वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करें। (2017A)

हल : वृत्त की परिधि $= 2\pi r; \quad 88 = 2\times\frac{22}{7}r$

$\Rightarrow 88\times7 = 2\times22\,r \quad \therefore \quad r = \frac{88\times7}{2\times22}$ 14 cm.

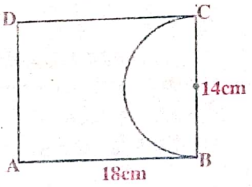
वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \frac{22}{7}\times(14)^2 = \frac{22}{7}\times14\times14$
$= 616 \text{ cm}^2.$ उत्तर।

प्रश्न 24. दी गई आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल निकालें, यदि वर्ग ABCD की प्रत्येक भुजा 14 सेमी है तथा APD और BPC दो अर्द्धवृत्त हैं। (2015C)



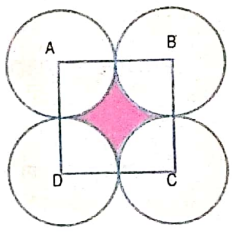
हल : वर्ग की भुजा = 14 cm
अर्धवृत्त का व्यास (AB = BC) = 14 cm
अर्धवृत्त की त्रिज्या (R) = 7 cm
वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा)^2 = 14 × 14 = 196 cm^2
अर्धवृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times7\times7 = 77 \text{ cm}^2$
दो अर्धवृत्तों का क्षेत्रफल = 2 (77) = 154 cm^2
छायांकित भाग का क्षेत्रफल = वर्ग ABCD का क्षेत्रफल
– दो अर्द्धवृत्तों का क्षेत्रफल
= (196 – 154) = 42 cm^2
छायांकित भाग का क्षेत्रफल = 42 cm^2; उत्तर।

प्रश्न 25. एक आयताकार कागज का टुकड़ा है जिसमें AB = 18 cm और BC = 14 cm है। इस कागज के टुकड़े से BC को व्यास मानकर अर्द्ध वृत्ताकार टुकड़ा काट लिया जाता है। कागज के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें। (M. Q., Set–III : 2011, M. Q., Set–II : 2015)



हल : आयताकार कागज का क्षेत्रफल
= 18 × 14 = 252 वर्ग सेमी.
अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\pi r^2$
$= \frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times7^2$
= 77 वर्ग सेमी० उत्तर
$\therefore$ शेष भाग का क्षेत्रफल = 252 – 77 = 175 वर्ग सेमी.

प्रश्न 26. आकृति में, ABCD भुजा 14 cm वाला एक वर्ग है। A, B, C और D को केन्द्र मानकर, चार वृत्त इस प्रकार खींचे गए हैं कि प्रत्येक वृत्त तीन शेष वृत्तों में से दो वृत्तों को वाह्य रूप से स्पर्श करता है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



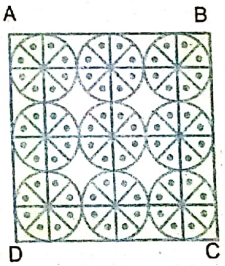
हल : वर्ग ABCD की भुजा = 14 cm.
वृत्त की त्रिज्या (R) = 7 cm
त्रिज्या कोण (θ) = 90° [वर्ग का प्रत्येक कोण 90° है।]
वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा)^2 = 14 × 14 = 196 cm^2

चार चतुर्थांशों का क्षेत्रफल $= 4\left[\frac{\pi R^2\theta}{360}\right]$

$= 4\times\frac{22}{7}\times\frac{7\times7\times90}{360}$
$= 22\times7 = 154 \text{ cm}^2$

$\therefore$ अभीष्ट छायांकित क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल – चार चतुर्थांशों का क्षेत्रफल
= 196 – 154 = 42 cm^2; उत्तर।

प्रश्न 27. एक वर्गाकार रूमाल पर, नौ वृत्ताकार डिजाइन बने हैं, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 7 cm है (देखिए आकृति)। रूमाल के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

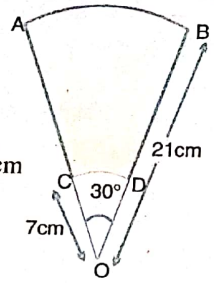


हल : वृत्त की त्रिज्या (R) = 7 cm
वृत्त का व्यास = 2 × R
= 2 × 7
= 14 cm
क्योंकि वर्ग की भुजा के अनुदिश तीन वृत्त हैं।
$\therefore$ वर्ग की भुजा = 3 [14] = 42 cm.
रूमाल का कुल क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा)^2
= (42)^2 = 1764 cm^2.
नौ वृत्ताकार डिजाइनों का क्षेत्रफल $= 9\pi R^2$

$= 9\times\frac{22}{7}\times(7)^2 = 9\times\frac{22}{7}\times7\times7$
$= 9\times154 = 1386 \text{ cm}^2$

$\therefore$ शेष भाग का अभीष्ट क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल
– 9 वृत्ताकार डिजाइनों का क्षेत्रफल
= 1764 – 1386
= 378 cm^2; उत्तर।

प्रश्न 28. AB और CD केन्द्र O तथा त्रिज्याएँ 21 cm और 7 cm वाले दो संकेन्द्रीय वृत्तों के क्रमशः दो चाप हैं (देखिए आकृति)। यदि $\angle AOB = 30°$ है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : त्रिज्यखंड OBA की त्रिज्या (R) = 21 cm
त्रिज्यखंड ODC की त्रिज्या (r) = 7 cm
त्रिज्यखंड का कोण (θ) = 30°
बड़े त्रिज्यखंड (OAB) का क्षेत्रफल

$$= \frac{R^2\theta}{360°}$$

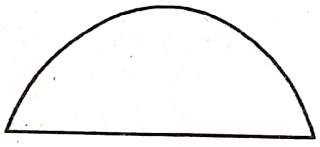
$$= \frac{22}{7} \times \frac{21 \times 21 \times 30°}{360°} = 115.5 \text{ cm}^2$$

छोटे त्रिज्यखंड (ODC) का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2\theta}{360°}$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7 \times 7 \times 30°}{360°} = 12.83 \text{ cm}^2$$

अब छायांकित भाग का क्षेत्रफल
= बड़े त्रिज्यखंड OAB का क्षेत्रफल
– छोटे त्रिज्यखंड OCD का क्षेत्रफल
= 115.5 – 12.83 = 102.67 cm²; उत्तर।

प्रश्न 29. एक अर्द्धवृत्त चाँद की परिधि 36 cm तो इसका व्यास निकालें।
(M. Q., Set–I : 2015)



हल : $\pi r + 2r = 36$

$$\Rightarrow r(\pi + 2) = 36$$

$$\Rightarrow r\left(\frac{22}{7} + 2\right) = 36$$

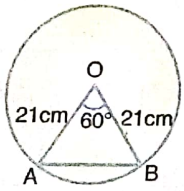
$$\Rightarrow r\left(\frac{22+14}{7}\right) = 36$$

$$\Rightarrow 36\, r = 36 \times 7 \qquad \therefore \quad r = 7 \text{ cm}$$

$\therefore$ $d = 2 \times 7 = 14$ cm उत्तर।

प्रश्न 30. त्रिज्या 21 cm वाले वृत्त का एक चाप केन्द्र पर 60° का कोण अंतरित करता है। ज्ञात कीजिए :
(i) चाप की लंबाई
(ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल
(iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल।

हल : (i) वृत्त की त्रिज्या (R) = 21 cm
केन्द्रीय कोण (θ) = 60°



चाप की लंबाई $= \frac{\theta}{360} \times 2\pi R$

$$= \frac{60}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$$

= 22 cm; उत्तर।

(ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi R^2\theta}{360}$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{21 \times 21 \times 60}{360} = 231 \text{ cm}^2$$

$\therefore$ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल क्योंकि ΔOAB समबाहु है जिसमें $\theta = 60°$.

(iii) वृत्तखंड का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल – ΔAOB का क्षेत्रफल

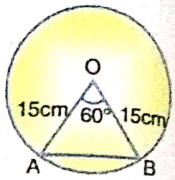
$$= \frac{R^2}{360} - \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{भुजा})^2$$

$$= 231 - \frac{1.73}{4} \times 21 \times 21$$

$$= 231 - 0.4325 \times 441$$

$$= 231 - 190.7325 = 40.26 \text{ cm}^2;$$ उत्तर।

प्रश्न 31. 15 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करती है। संगत लघु और दीर्घ वृत्तखंडों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73$ का प्रयोग कीजिए।)



हल : वृत्त की त्रिज्या (R) = 15 cm
केन्द्रीय कोण (θ) = 60°
ΔOAB में, केन्द्रीय कोण $\theta = 60°$
OA = OB = 15 cm.
$\therefore$ $\angle A = \angle B = 60°$
$\therefore$ ΔOAB समबाहु त्रिभुज है।

$$\begin{bmatrix}\text{लघु वृत्तखंड}\\ \text{का क्षेत्रफल}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{लघु त्रिज्यखंड}\\ \text{का क्षेत्रफल}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{समबाहु त्रिभुज}\\ \text{का क्षेत्रफल}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{\pi R^2\theta}{360°} - \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{भुजा})^2$$

$$= 3.14 \times \frac{15 \times 15 \times 60°}{360°} - \frac{1.73}{4} \times (15)^2$$

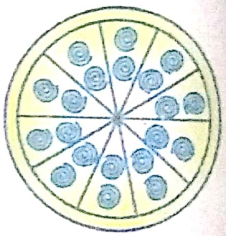
$$= 15 \times 15 \left[\frac{3.14 \times 60°}{360°} - \frac{1.73}{4}\right]$$

$$= \frac{225}{100}\left[\frac{314}{6} - \frac{173}{4}\right] = \frac{225}{100}\,[52.33 - 43.25]$$

$$= \frac{225}{100} \times 9.08 = \frac{2043}{100} = 20.43 \text{ cm}^2$$

दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल – लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल
$= \pi R^2 - 20.43 = 3.14 \times 15 \times 15 - 20.43$
$= 706.5 - 20.43 = 686.07 \text{ cm}^2$; उत्तर।

प्रश्न 32. एक वृत्ताकार ब्रूच (brooch) को चाँदी के तार से बनाया जाना है जिसका व्यास 35 mm है। तार को वृत्त के 5 व्यासों को बनाने में भी प्रयुक्त किया गया है जो उसे 10 बराबर त्रिज्यखंडों में विभाजित करता है, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। तो ज्ञात कीजिए :



(i) कुल वांछित चाँदी के तार की लंबाई
(ii) ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

हल : वृत्त का व्यास (D) = 35 mm

वृत्त की त्रिज्या (R) $= \frac{35}{2}$ mm

व्यासों की संख्या = 5
बराबर त्रिज्यखंडों की संख्या = 10
(i) प्रयोग की गई तार की लंबाई = 5 व्यासों की लंबाई + वृत्त (ब्रूच) की परिमाप

$$= 5\,(35) + 2\pi R = 175 + 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{2}$$

$$= 175 + 110 = 285 \text{ mm}$$

(ii) ब्रूच का त्रिज्यखंड का कोण $= \frac{360°}{\text{त्रिज्यखंडों की संख्या}}$

$$= \frac{360°}{10} = 36°$$

प्रत्येक ब्रूच का क्षेत्रफल (त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल) $= \frac{\pi R^2\theta}{360}$

$$= \frac{36}{360} \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2}$$

$$= \frac{11 \times 35}{4} = \frac{385}{4} \text{ mm}^2$$

$= 96.25 \text{ mm}^2$; उत्तर।

प्रश्न 33. एक घड़ी की मिनट की सूई, जिसकी लंबाई 14 cm है, सूई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (M. Q., Set–II : 2015)

हल : मिनट की सूई की लंबाई = वृत्त की त्रिज्या (R) = 14 cm

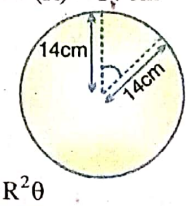
हमें ज्ञात है,

$60' = 360°$

$1' = \frac{360}{60} = 6°$

$5' = 6° \times 5 = 30°$

अत: त्रिज्यखंड कोण $(\theta) = 30°$



∴ सूई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल $= \frac{\pi R^2\theta}{360}$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times \frac{30°}{360°}$

$= \frac{1}{12} \times 22 \times 28 = \frac{154}{3}$ cm^2

$= 51{\cdot}33$ cm^2; उत्तर।

प्रश्न 34. किसी कार के प्रत्येक पहिए का व्यास 80 cm है। यदि यह कार 66 km प्रति घंटे की चाल से चल रही है, तो 10 मिनट में प्रत्येक पहिया कितने चक्कर लगाती है ?

हल : पहिए का व्यास = 80 cm

पहिए की त्रिज्या (R) = 40 cm = $\frac{4}{100} = 0.04$ m

पहिए की परिधि $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 0.04$

मान लीजिए कार का पहिया n पूरे चक्कर लगाने में 10 मिनट में दूरी तय करता है

$= n\left[0.08 \times \frac{22}{7}\right]$

कार की चाल = 66 किमी०/घंटा

60 मिनट में तय की गई दूरी = 66 km = 66 × 1000 m

10 मिनट में तय की गई दूरी $= \frac{66 \times 1000}{60} \times 10 = 11000$ m

∴ $n\left[\frac{22}{7} \times 0.08\right] = 11000$

$n = \frac{11000}{0.08} \times \frac{7}{22} = 43750$

अत: कार के पहिए द्वारा 10 मिनट में लगाए गए पूरे चक्करों की संख्या = 43750; उत्तर।

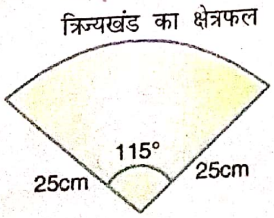
प्रश्न 35. किसी कार के दो वाइपर (Wipers), परस्पर कभी आच्छादित नहीं होते हैं। प्रत्येक वाइपर की पत्ती की लंबाई 25 cm है और 115° के कोण तक घूमकर सफाई कर सकता है। पत्तियों की प्रत्येक बुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ हो जाता है, वह ज्ञात कीजिए। (M.Q., Set–II : 2016)

हल : पत्ती की लंबाई (R) = 25 cm

त्रिज्यखंड का कोण $(\theta) = 115°$

वाइपर त्रिज्यखंड के रूप में घूमता है।

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = एक पत्ती द्वारा घूमा गया क्षेत्रफल



$= \frac{R^2}{360}$

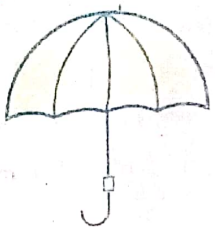
$= \frac{22}{7} \times \frac{115}{360} \times 25 \times 25$

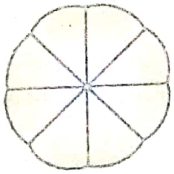
$= 627.48$ cm^2

वाइपर की दो पत्तियों द्वारा घूमा गया क्षेत्रफल = 2 त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$= 2 \times 627.48 = 1254{\cdot}96$ cm^2; उत्तर।

प्रश्न 36. एक छतरी में आठ ताने हैं, जो बराबर दूरी पर लगे हुए हैं (देखिए आकृति)। छतरी को 45 cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए, इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।





हल : वृत्त की त्रिज्या = 45 cm; तानों की संख्या = 8

केन्द्रीय कोण (त्रिज्यखंड कोण) $= \frac{360}{8} = 45°$

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi R^2\theta}{360°} = \frac{45}{360°} \times \frac{22}{7} \times 45 \times 45$

$= \frac{1}{8} \times \frac{22}{7} \times 45 \times 45$

$= \frac{22275}{28}$ cm^2 $= 795.53$ cm^2

∴ छतरी के दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल = 795.53 cm^2; उत्तर।

प्रश्न 37. आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि PQ = 24 cm, PR = 7 cm तथा O वृत्त का केन्द्र है।

हल : PQ = 24 cm, PR = 7 cm.

RQ वृत्त का व्यास है।

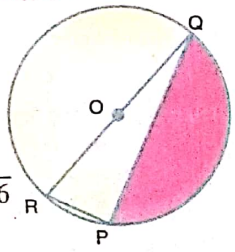
$\angle RPQ = 90°$ अर्धवृत्त का कोण

ΔPQR में,

$QR^2 = RP^2 + PQ^2$

$QR = \sqrt{(7)^2 + (24)^2} = \sqrt{49 + 576}$

$= \sqrt{625} = 25$ cm



∴ वृत्त का व्यास (QR) = 25 cm.

वृत्त की त्रिज्या (R) $= \frac{25}{2}$ cm

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = अर्धवृत्त का क्षेत्रफल – ΔRPQ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2} RP \times PQ$

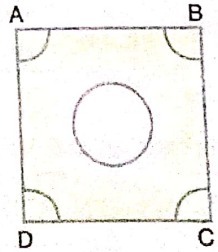
$= \left[\frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{25}{2} \times \frac{25}{2} - \frac{1}{2} \times 7 \times 24\right]$ cm^2

$= \left[\frac{6875}{28} - 84\right]$

$= 245.53 - 84 = 161.53$ cm^2

∴ छायांकित भाग का क्षेत्रफल = 161.53 cm^2; उत्तर।

प्रश्न 38. भुजा 4 cm वाले एक वर्ग के प्रत्येक कोने से 1 cm त्रिज्या वाले वृत्त का एक चतुर्थांश काटा गया है तथा बीच में 2 cm व्यास का एक वृत्त भी काटा गया है, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। वर्ग के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : वर्ग की भुजा = 4 cm

काटे गए प्रत्येक अर्धवृत्त की त्रिज्या (r) = 1 cm

वृत्त का व्यास = 2 cm

∴ वृत्त की त्रिज्या (R) = 1 cm

वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा)^2 = $(4)^2 = 16$ cm^2

4 चतुर्थांशों का क्षेत्रफल $= 4\left[\frac{\pi r^2\theta}{360^\circ}\right] = \frac{4}{360^\circ} \times 90^\circ \times \frac{22}{7} \times 1 \times 1$

$= 1 \times \frac{22}{7} \times 1 \times 1 = 3.14 \text{ cm}^2$

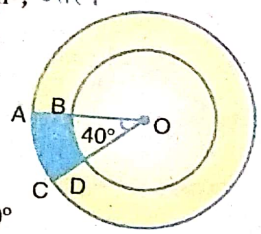
वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi R^2 = \frac{22}{7} \times 1 \times 1 = \frac{22}{7} = 3.14 \text{ cm}^2$

अभीष्ट क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल – 4 चतुर्थांशों का क्षेत्रफल – वृत्त का क्षेत्रफल

$= (16 - 3.14 - 3.14) \text{ cm}^2$

$= 9.72 \text{ cm}^2$; उत्तर।

प्रश्न 39. आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि केन्द्र O वाले दोनों संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 7 cm और 14 cm हैं तथा $\angle AOC = 40^\circ$ है। (2015A)



हल : छोटे वृत्त की त्रिज्या $(r) = 7$ cm

बड़े वृत्त की त्रिज्या $(R) = 14$ cm

केन्द्रीय कोण $\angle AOC\ (\theta) = 40^\circ$

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = बड़े वृत्तखंड OAC का क्षेत्रफल – छोटे वृत्तखंड OBD का क्षेत्रफल

$= \frac{\pi R^2\theta}{360} - \frac{\pi r^2\theta}{360} = \frac{\pi\theta}{360}[R^2 - r^2]$

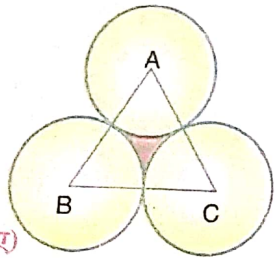
$= \frac{22}{7} \times \frac{40}{360} \times [14^2 - 7^2]$

$= \frac{22}{63}[196 - 49] = \frac{22}{63} \times 147$

$= 51.33 \text{ cm}^2$

∴ छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= 51.33 \text{ cm}^2$; उत्तर।

प्रश्न 40. एक समबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 17320.5 cm^2 है। इस त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष को केन्द्र मानकर त्रिभुज की भुजा के आधे के बराबर की त्रिज्या लेकर एक-एक वृत्त खींचा जाता है (देखिए आकृति)। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73205$ लीजिए)

हल : समबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= 17320.5 \text{ cm}^2$

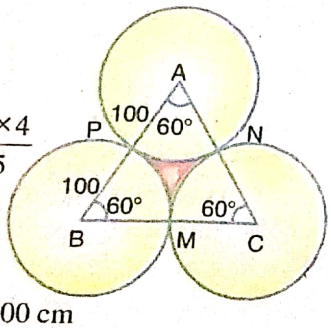
$\frac{\sqrt{3}}{4}(\text{भुजा})^2 = 17320.5$

$(\text{भुजा})^2 = \frac{17320.5 \times 4}{1.73205}$

$(\text{भुजा})^2 = \frac{173205}{10} \times \frac{100000 \times 4}{173205}$

भुजा $= \sqrt{4 \times 100 \times 100}$

भुजा $= 2 \times 100 = 200$ cm



∴ $AB = BC = AC$

वृत्त की त्रिज्या $(R) = \frac{AB}{2} = \frac{200}{2} = 100$ cm

त्रिज्यखंड का कोण, $\theta = 60^\circ$

त्रिज्यखंड APN का क्षेत्रफल $= \frac{\pi R^2\theta}{360^\circ} = \frac{3.14 \times 100 \times 100 \times 60^\circ}{360^\circ}$

$= 5233.33 \text{ cm}^2$

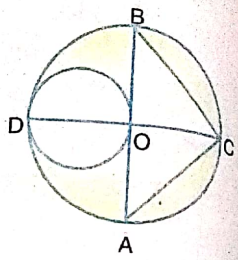
तीनों त्रिज्यखंडों का क्षेत्रफल $= 3 \times 5233.33 \text{ cm}^2 = 15699.9 = 15700$

∴ अभीष्ट छायांकित क्षेत्रफल = त्रिभुज का क्षे॰ – तीन त्रिज्यखंडों का क्षे॰

$= 17320.5 - 15700 = 1620.5 \text{ cm}^2$

∴ छायांकित क्षेत्रफल $= 1620.5 \text{ cm}^2$; उत्तर।

प्रश्न 41. आकृति में, AB और CD केन्द्र O वाले एक वृत्त के दो परस्पर लंब व्यास हैं तथा OD छोटे वृत्त का व्यास है। यदि OA = 7 cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : वृत्त का व्यास = 14 cm

वृत्त की त्रिज्या = 7 cm

छोटे वृत्त का व्यास = 7 cm

∴ छोटे वृत्त की त्रिज्या $= \frac{7}{2}$ cm

AB और CD एक वृत्त के दो परस्पर लंब व्यास हैं।

∴ $AB \perp CD$

बड़े वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi R^2 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 154 \text{ cm}^2$

छोटे वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = 38.50 \text{ cm}^2$

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 14 \times 7 = 49 \text{ cm}^2$

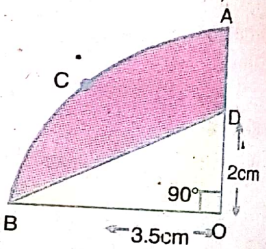
∴ छायांकित क्षेत्रफल = बड़े वृत्त का क्षेत्रफल – छोटे वृत्त का क्षेत्रफल – त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= (154 - 38.5 - 49) \text{ cm}^2 = 66.5 \text{ cm}^2$; उत्तर।

प्रश्न 42. आकृति में, OACB केन्द्र O और त्रिज्या 3.5 cm वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है। यदि OD = 2 cm है, तो निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

(i) चतुर्थांश OACB

(ii) छायांकित भाग



हल : चतुर्थांश की त्रिज्या $(R) = 3.5$ cm

त्रिज्यखंड का कोण $(\theta) = 90^\circ$

$OD = 2$ cm

(i) चतुर्थांश OACB का क्षेत्रफल $= \frac{R^2}{360^\circ} = \frac{22}{7} \times \frac{3.5 \times 3.5 \times 90^\circ}{360^\circ}$

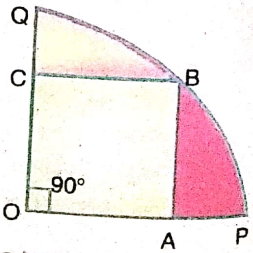
$= 9.625 \text{ cm}^2$; उत्तर।

(ii) ΔODB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई $= \frac{1}{2} \times 3.5 \times 2 = 3.5 \text{ cm}^2$

∴ छायांकित क्षेत्रफल = चतुर्थांश OACB का क्षेत्रफल – ΔODB का क्षेत्रफल

$= 9.625 - 3.5 = 6.125 \text{ cm}^2$; उत्तर।

प्रश्न 43. आकृति में, एक चतुर्थांश OPBQ के अंतर्गत एक वर्ग OABC बना हुआ है। यदि OA = 20 cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)



हल : वर्ग ABCO की भुजा = 20 cm

$\angle AOC = 90^\circ$

$AB = OA$

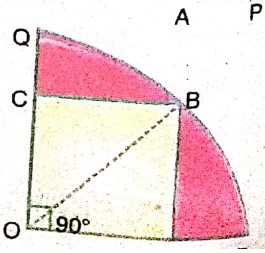
∴ ΔOAB में,

$OB^2 = OA^2 + AB^2$

$OB = \sqrt{(20)^2 + (20)^2}$

$= \sqrt{400 + 400}$

$= \sqrt{800} = 20\sqrt{2}$ cm



वर्ग का क्षेत्रफल $= (\text{भुजा})^2 = (20)^2$

∴ वर्ग का क्षेत्रफल = 400 cm²

चतुर्थांश की त्रिज्या (R) = $20\sqrt{2}$ cm

त्रिज्यखंड का कोण (θ) = 90°

∴ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{R^2\theta}{360}$

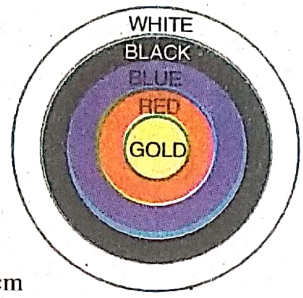
$= \frac{3.14 \times 20\sqrt{2} \times 20\sqrt{2} \times 90^\circ}{360^\circ}$

$= 2 \times 314 \text{ cm}^2 = 628 \text{ cm}^2$

∴ अभीष्ट छायांकित क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल – वर्ग का क्षेत्रफल

$= (628 - 400) \text{ cm}^2 = 228 \text{ cm}^2$; उत्तर।

प्रश्न 44. आकृति एक तीरंदाजी लक्ष्य को दर्शाती है, जिसमें केन्द्र से बाहर की ओर पाँच क्षेत्र Gold, Red, Blue, Black और White चिह्नित हैं, जिनसे अंक अर्जित किए जा सकते हैं। Gold अंक वाले क्षेत्र का व्यास 21 cm है तथा प्रत्येक अन्य पट्टी 10.5 cm चौड़ी है। अंक प्राप्त करने वाले इन पाँचों क्षेत्रों में से प्रत्येक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : Gold क्षेत्र का व्यास = 21 cm

Gold क्षेत्र की त्रिज्या $(R_1) = \frac{21}{2} = 10.5$ cm

∴ Gold क्षेत्र का क्षेत्रफल $= R_1^2 = \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \times \frac{693}{2} \text{ cm}^2$

$= 346{\cdot}5 \text{ cm}^2$

प्रत्येक पट्टी की चौड़ाई = 10.5 cm

∴ Red और Gold क्षेत्र की त्रिज्या $(R_2) = (10.5 + 10.5) = 21$ cm.

Blue, Red और Gold क्षेत्र की संयुक्त त्रिज्या (R_3)

$= R_2 + 10.5 = 21 + 10.5 = 31.5$

Black, Blue, Red और Gold क्षेत्र की संयुक्त त्रिज्या (R_4)

$= R_3 + 10.5 = 31.5 + 10.5 = 42$ cm

White, Black, Blue, Red, Gold क्षेत्र की संयुक्त त्रिज्या (R_5)

$= R_4 + 10.5 = 42 + 10.5 = 52.5$ cm

Black क्षेत्र का क्षेत्रफल = Gold, Red, Blue और Black क्षेत्र का संयुक्त क्षेत्रफल – Gold, Red और Blue क्षेत्र का संयुक्त क्षेत्रफल

$= \pi R_4^2 - \pi R_3^2 = \pi [(42)^2 - (31.5)^2]$

$= \frac{22}{7} [1764 - 992.25]$

$= \frac{22}{7} [771.75] = 2425.5 \text{ cm}^2$

White अंक वाले क्षेत्र का क्षे॰ = White, Black, Blue, Red, Gold क्षेत्र का संयुक्त क्षेत्रफल – Black, Blue, Red और Gold क्षेत्र का संयुक्त क्षेत्रफल

$= \pi R_5^2 - \pi R_4^2 = \pi [R_5^2 - R_4^2]$

$= \frac{22}{7} \times [(52.5)^2 - (42)^2]$

$= \frac{22}{7} [2756.25 - 1764]$

$= \frac{22 \times 992.25}{7} = \frac{21829.5}{7}$

$= 3118.5 \text{ cm}^2$

∴ Red क्षेत्र का क्षेत्रफल = Red और Gold क्षेत्र का क्षेत्रफल – Gold क्षेत्र का क्षेत्रफल

$= \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = \left[(21)^2 - \left(\frac{21}{2}\right)^2\right]$

$= \pi \left[441 - \frac{441}{4}\right] = \frac{22}{7} \pi 441 \left[1 - \frac{1}{4}\right]$

$= 22 \times 63 \left[\frac{3}{4}\right] = \frac{11 \times 189}{2} = \frac{2079}{2} \text{ cm}^2$

$= 1039.5 \text{ cm}^2$

Blue अंक वाले क्षेत्र का क्षे॰ = Red, Blue और Gold क्षेत्र का संयुक्त क्षेत्रफल – Gold और Red क्षेत्र का संयुक्त क्षेत्रफल

$= \pi R_3^2 - \pi R_2^2 = \pi [R_3^2 - R_2^2]$

$= \frac{22}{7} [(31.5)^2 - (21)^2]$

$= \frac{22}{7} [992.25 - 441]$

$= \frac{22}{7} \times 551.25 = \frac{12127.5}{7}$

$= 1732.5 \text{ cm}^2$

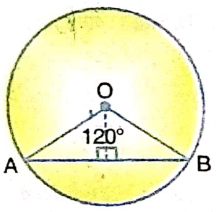
Gold, Red, Blue, Black और White का क्षेत्रफल क्रमशः = 346.5 cm², 1039.5 cm², 1732.5 cm², 2425.5 cm² तथा 3118.5 cm². उत्तर।

प्रश्न 45. त्रिज्या 12 cm वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर 120° का कोण अंतरित करती है। संगत वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : वृत्त की त्रिज्या (R) = 12 cm

केन्द्रीय कोण (θ) = 120°



ΔOAM में, OM ⊥ AB

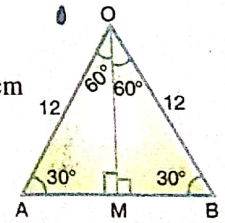
∴ $AM = MB = \frac{1}{2} AB$

∴ $\angle OAM = 30^\circ = \angle OBM$

$AB = 2AM = 2 \left(\frac{AM}{OA}\right) OA$

$= 2 (\sin 60^\circ) 12$

$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 12\sqrt{3}$ cm



$OM = OA \left(\frac{OM}{OA}\right) = 12 \cos 60^\circ$

$= 12 \times \frac{1}{2} = 6$ cm

∴ वृत्तखंड का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल – ΔOAB का क्षेत्रफल

$= \frac{\pi R^2 \theta}{360^\circ} - \frac{1}{2} AB \times OM$

$= \frac{3.14 \times 12 \times 12 \times 120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times 12\sqrt{3} \times 6$

$= \frac{314}{100} \times \frac{144 \times 120^\circ}{360^\circ} - 36\sqrt{3}$

$= 150.72 - 36 \times 1.73$

$= (150.72 - 62.28) \text{ cm}^2$

$= 88.44 \text{ cm}^2$; उत्तर।

प्रश्न 46. त्रिज्या 21 cm वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर 120° का कोण अंतरित करती है। संगत वृत्त खंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : $r = 21$ cm, $\theta = 120°$

संगत वृत्तखंड का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल − त्रिभुज का क्षेत्रफल

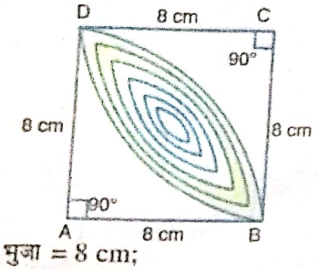
$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$$

$$= \frac{120°}{360°} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 - \frac{1}{2} \times 21 \times 21 \sin 120°$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 - \frac{1}{2} \times 21 \times 21 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(\because \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(462 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right) \text{cm}^2$$; उत्तर।

प्रश्न 47. आकृति में, छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जो 8 cm त्रिज्याओं वाले दो वृत्तों के चतुर्थांशों के बीच उभयनिष्ठ है।



हल : वर्ग की भुजा = 8 cm;

वर्ग का क्षेत्रफल = $(8)^2 = 64$ cm^2

रेखा BD वर्ग ABCD को समान भागों में विभाजित करती है।

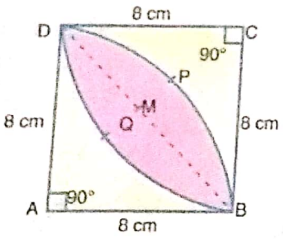
ΔABD का क्षेत्रफल = ΔBDC का क्षेत्रफल

त्रिज्यखंड का कोण, $\theta = 90°$

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi R^2 \theta}{360°}$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{8 \times 8 \times 90°}{360°}$$

$$= 50.28 \text{ cm}^2$$



ΔABD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AB \times AD$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32 \text{ cm}^2$$

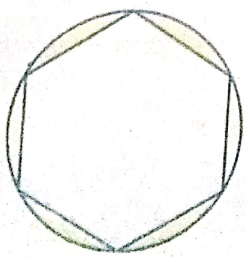
∴ वृत्तखंड DQBPD का क्षेत्रफल = ABPD का क्षेत्रफल − ΔABD का क्षेत्रफल

$$= 50.28 - 32 = 18.28 \text{ cm}^2$$

छायांकित क्षेत्रफल = 2 वृत्तखंड DMBPD का क्षेत्रफल

$$= 2\,(18.28) = 36.57 \text{ cm}^2$$; उत्तर।

प्रश्न 48. एक गोल मेजपोश पर छः समान डिजाइन बने हुए हैं, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। यदि मेजपोश की त्रिज्या 28 cm है, तो 0.35 रु. प्रति वर्ग सेंटीमीटर की दर से इन डिजाइनों को बनाने की लागत ज्ञात कीजिए। ($\sqrt{3} = 1.7$ का प्रयोग कीजिए।)



हल : समान डिजाइनों की संख्या = 6

मेजपोश की त्रिज्या $(R) = 28$ cm.

प्रत्येक डिजाइन त्रिज्यखंड के आकार का है, केन्द्रीय कोण $(\theta) = \frac{360}{6} = 60°$

क्योंकि केन्द्रीय कोण 60° है और OA = OB है।

∴ ΔOAB एक समबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजा 28 cm है।

एक छायांकित डिजाइन भाग का क्षेत्रफल = वृत्तखंड का क्षेत्रफल

= त्रिज्यखंड OAB का क्षेत्रफल − ΔOAB का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi R^2 \theta}{360} - \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{भुजा})^2$$

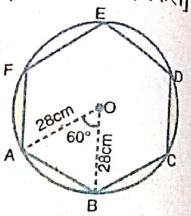
$$= \left(\frac{22}{7} \times \frac{28 \times 28}{360} \times 60 - \frac{1.7}{4} \times 28 \times 28\right) \text{cm}^2$$

$$= (410.66 - 333.2) \text{ cm}^2 = 77.46 \text{ cm}^2$$

छः डिजाइन भागों का क्षेत्रफल = 6 [एक डिजाइन भाग का क्षेत्रफल]

$$= 6\,[77.46]$$

$$= 464.76 \text{ cm}^2$$



10 cm^2 डिजाइन बनाने का खर्च = 3.50 रु॰

1 cm^2 डिजाइन बनाने का खर्च $= \frac{3.50}{10}$

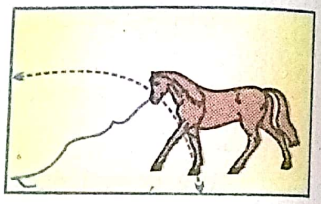
464.76 cm^2 डिजाइन बनाने का खर्च $= \frac{3.50}{10} \times 464.76$ रु॰

$$= 162.67$$ रु॰; उत्तर।

प्रश्न 49. 15 m भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूँटे से एक घोड़े को 5 m लंबी रस्सी से बाँध दिया गया है (देखिए आकृति) ज्ञात कीजिए :

(i) मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोड़ा घास चर सकता है।

(ii) चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि, यदि घोड़े को 5 m लंबी रस्सी के स्थान पर 10 m लंबी रस्सी से बाँध दिया जाए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)



हल : वर्ग की भुजा = 15 m

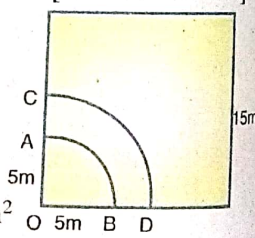
(i) खूँटे की रस्सी की लंबाई = त्रिज्यखंड की त्रिज्या $(R) = 5$ m

केन्द्रीय कोण $(\theta) = 90°$ [वर्ग का प्रत्येक कोण]

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi R^2 \theta}{360°}$

$$= \frac{3.14 \times 5 \times 5 \times 90°}{360°}$$

$$= \frac{3.14 \times 25}{4} \quad \frac{78.5}{4} \text{ m}^2$$



$$= 19.625 \text{ m}^2$$; उत्तर।

(ii) जब त्रिज्यखंड की त्रिज्या 10 m हो जाती है।

त्रिज्यखंड OCD की त्रिज्या $(R_1) = 10$ m

केन्द्रीय कोण $(\theta) = 90°$

∴ त्रिज्यखंड OCD का क्षेत्रफल $= \frac{R_1^2}{360°}$

$$= \frac{3.14 \times 10 \times 10 \times 90°}{360°}$$

$$= \frac{314}{100} \times \frac{100 \times 90°}{360°}$$

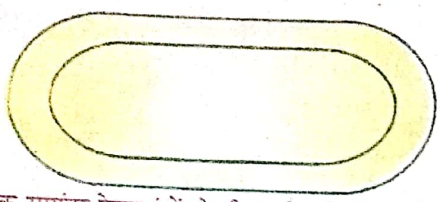
$$= \frac{314}{4} = 78.5 \text{ cm}^2$$

∴ चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि

= त्रिज्यखंड OCD का क्षेत्रफल − त्रिज्यखंड OAB का क्षेत्रफल

$$= 78.5 - 19.625 = 58.875 \text{ m}^2$$; उत्तर।

प्रश्न 54. आकृति में एक दौड़ने का पथ (racing track) दर्शाती है, जिसके बाएँ और दाएँ सिरे अर्धवृत्ताकार हैं।

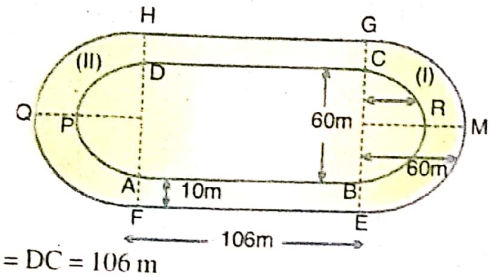


दोनों आंतरिक समांतर रेखाखंडों के बीच की दूरी 60 m है तथा इनमें से प्रत्येक रेखाखंड 106 m लंबा है। यदि यह पथ 10 m चौड़ा है, तो ज्ञात कीजिए –

(i) पथ के आंतरिक किनारों के अनुदिश एक पूरा चक्कर लगाने में चली गई दूरी

(ii) पथ का क्षेत्रफल।

हल :



यहाँ AB = DC = 106 m

AF = BE = CG = HD = 10 m

आंतरिक अर्धवृत्त का व्यास (APD और BRC) = 60 m

∴ अर्धवृत्त की आन्तरिक त्रिज्या (APD) (r) = 30 m

अर्धवृत्त की बाहरी त्रिज्या (R) = r + 10 = 30 + 10 = 40 m

पथ के आंतरिक किनारों के अनुदिश एक पूरा चक्कर लगाने में चली गई दूरी,

= AB + अर्धवृत्त BRC की परिमाप + CD + अर्धवृत्त DPA की परिमाप

= 2AB + 2 [अर्धवृत्त BRC का परिमाप]

$$= 2(106) + 2\left(\frac{2\pi r}{2}\right) = 212 + 2\pi r = 212 + 2 \times \frac{22}{7} \times 30$$

$$= 212 + \frac{60 \times 22}{7} = 212 + 188.57 = 400.57 \text{ m}$$

∴ पथ के आंतरिक किनारों के अनुदिश एक पूरा चक्कर लगाने में चली गई दूरी = 400.57 m; उत्तर।

(ii) पथ का क्षेत्रफल = आयत ABEF का क्षेत्रफल + क्षेत्र BEMGCRB का क्षेत्रफल + आयत CGHD का क्षेत्रफल + APDHQF का क्षेत्रफल

= 2 आयत ABEF का क्षे॰ + 2 अर्धवृत्त का क्षे॰

= 2 (AB × AF) + 2 [अर्धवृत्त की त्रिज्या 40 m – अर्धवृत्त जिसकी त्रिज्याएँ 30 m हैं, का क्षेत्रफल]

$$= 2[106 \times 10] + 2\left[\frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2}\right]$$

$$= 2 \times 1060 + \frac{2\pi}{2}[R^2 - r^2]$$

$$= 2120 + \frac{22}{7} \times (40^2 - 30^2)$$

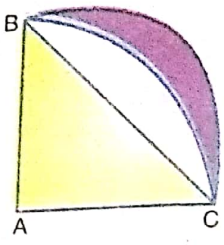
$$= 2120 + \frac{22}{7}[1600 - 900]$$

$$= 2120 + \frac{22}{7}[700]$$

$$= 2120 + 2200 = 4320 \text{ m}^2$$

पथ का क्षेत्रफल = 4320 m²; उत्तर।

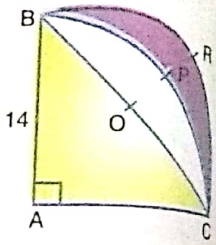
प्रश्न 55. आकृति में, ABC त्रिज्या 14 cm वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है तथा BC को व्यास मानकर एक अर्धवृत्त खींचा गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : त्रिज्यखंड ACPB की त्रिज्या (r) = 14 cm

त्रिज्यखंड कोण (θ) = 90°

AB = AC = 14 cm.



त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ AB × AC

$$= \frac{1}{2} \times 14 \times 14$$

$$= 98 \text{ cm}^2$$

त्रिज्यखंड ACPB का क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2\theta}{360°} = \frac{22}{7} \times \frac{14 \times 14 \times 90°}{360°}$

$$= 154 \text{ cm}^2$$

∴ BOCPB का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड ABPC का क्षेत्रफल – ΔABC का क्षेत्रफल

$$= 154 \text{ cm}^2 - 98 \text{ cm}^2 = 56 \text{ cm}^2$$

ΔBAC में,

$AB^2 + AC^2 = BC^2$; $(14)^2 + (14)^2 = BC^2$

$BC = \sqrt{196+196} = \sqrt{2(196)} = 14\sqrt{2}$

∴ अर्धवृत्त BOCR की त्रिज्या = $\frac{14\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$

अर्धवृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{\pi R^2}{2} = \frac{22}{7} \times \frac{7\sqrt{2} \times 7\sqrt{2}}{2}$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7 \times 7 \times 2}{2} = 154 \text{ cm}^2$$

अभीष्ट क्षेत्रफल = अर्धवृत्त का क्षेत्रफल – [त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल – ΔBAC का क्षेत्रफल]

$$= 154 - [154 - 98] = 154 - 56 = 98 \text{ cm}^2$$

∴ छायांकित भाग का क्षेत्रफल = 98 cm²; उत्तर।

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

प्रश्न 1. 3.5 सेमी॰ त्रिज्या वाले अर्द्धगोले का वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (2011A)

हल : अर्द्धगोले का वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल = $2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2 = \frac{539}{7} = 77 \text{ वर्ग सेमी॰ उत्तर।}$$

प्रश्न 2. 3.5 cm त्रिज्या वाले अर्द्धगोले का वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल निकालें। (M. Q. Set–III : 2015)

हल : r = 3.5 cm

अर्द्धगोले का क्षेत्रफल = $2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{10} \times \frac{35}{10} = 77 \text{ cm}^2 \text{ उत्तर।}$$

प्रश्न 3. एक घनाभ के कोरों की लम्बाई क्रमशः 3 सेमी०, 4 सेमी० और 12 सेमी० हैं, तो घनाभ के विकर्ण की लम्बाई ज्ञात करें। (2011C)

हल : घनाभ के कोरों की लम्बाई = 3cm, चौड़ाई = 4cm, ऊँचाई = 12cm

घनाभ का विकर्ण $= \sqrt{l^2+b^2+h^2} = \sqrt{3^2+4^2+12^2}$

$= \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$

घनाभ के विकर्ण की लम्बाई = 13 सेमी. उत्तर।

प्रश्न 4. यदि एक शंकु और एक बेलन के व्यास और ऊँचाई समान हैं तो उनके आयतन का अनुपात कितना होगा? (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : शंकु की त्रिज्या = r = बेलन की त्रिज्या

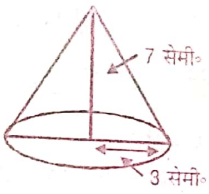
शंकु की ऊँचाई = h = बेलन की ऊँचाई

V_1 = शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

V_2 = बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

अनुपात $= \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$. उत्तर।

प्रश्न 5. दिये गये चित्र से शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए। (M. Q., Set–I : 2011)



∴

हल : शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 9 \times 7 = 66\ \text{cm}^3$ उत्तर।

प्रश्न 6. दो घनों, जिनमें से प्रत्येक का आयतन 64 cm³ है, के संलग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है। इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (2013A, M. Q. Set–I : 2015, M.Q., Set–IV : 2016, 2017A)

हल : माना कि घन के प्रत्येक फलक की लंबाई a cm है।

तब, आयतन = 64 cm³ $\Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a = 4$

जब दो समान आयतनों (अर्थात् समान फलकों) वाले घनों के संलग्न फलकों को मिलाया जाता है, तो हमें एक घनाभ प्राप्त होता है इस तरह कि

l = लंबाई = 4 cm + 4 cm = 8 cm

b = चौड़ाई = 4 cm

और h = ऊँचाई = 4 cm

∴ घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + hl)$

$= 2(8\times4 + 4\times4 + 4\times8)\ \text{cm}^2$

$= 2(32 + 16 + 32)\ \text{cm}^2$

$= (2\times80)\ \text{cm}^2 = 160\ \text{cm}^2$; उत्तर।

प्रश्न 7. किसी बेलनाकार पात्र की ऊँचाई 10 cm है और उसकी आधार की त्रिज्या 7 cm है तो उस पात्र की धारिता क्या है? (M. Q., Set–III : 2011)

हल : बेलनाकार पात्र की धारिता $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 7^2 \times 10$

$= 1540$ घन सेमी. उत्तर।

प्रश्न 8. यदि घन का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल 150 वर्ग मीटर हो तो उसका आयतन ज्ञात करें। (M. Q., Set–II : 2011)

हल : माना घन की भुजा = a

∴ कुल पृष्ठ $= 2(a^2 + a^2 + a^2) = 6a^2 = 150\ \text{m}^2$

$\Rightarrow a^2 = \frac{150}{6} = 25$ मीटर ∴ $a = 5$ मीटर

आयतन $= a^3 = 5^3 = 125$ घन मीटर उत्तर

प्रश्न 9. एक बेलन के आधार की परिधि 132 cm, उसकी ऊँचाई 25 cm है, तो बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए। (M. Q., Set–I : 2011)

हल : बेलन के आधार की त्रिज्या $= \frac{\text{परिधि}}{2\pi} = \frac{132\times7}{2\times22}$

$= 3\times7 = 21$ सेमी०

बेलन का आयतन $= \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 25$

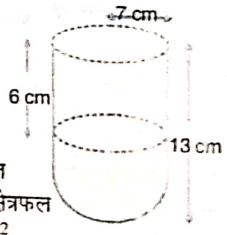
$= 34650$ घन सेमी० उत्तर।

प्रश्न 10. कोई बर्तन एक खोखले अर्द्धगोले के आकार का जिसके ऊपर एक खोखला बेलन अध्यारोपित है। अर्द्धगोले का व्यास 14 cm है और इस बर्तन (पात्र) की कुल ऊँचाई 13 cm है। इस बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (2013C)

हल : यहाँ अर्द्धगोले की त्रिज्या, $r = 7$ cm

बेलन की ऊँचाई, $h = (13 - 7)$ cm = 6 cm

स्पष्ट है, बेलनाकार भाग के आधार की त्रिज्या भी 7 cm है।



पात्र का पृष्ठीय क्षेत्रफल

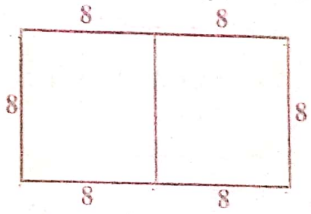
= बेलनाकार भाग का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्द्धगोलाकार भाग का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= (2\pi rh + 2\pi r^2)\ \text{cm}^2 = 2\pi r(h + r)\ \text{cm}^2$

$= 2\times\frac{22}{7}\times7\times13\ \text{cm}^2 = 572\ \text{cm}^2$; उत्तर।

प्रश्न 11. 8 cm भुजा वाले दो घन बराबर से जोड़ दिये गये हैं। परिणामी घनाभ का पृष्ठ क्षेत्रफल एवं आयतन ज्ञात करें। (M. Q., Set–II : 2011, 2011C, 2013C, M.Q., Set–II & III : 2016)

हल :



घनाभ की लम्बाई = 16, चौड़ाई = 8, ऊँचाई = 8

पृष्ठ क्षेत्रफल $= 16\times8 + 8\times8 + 8\times16$

$= 128 + 64 + 128 = 320\ \text{cm}^2$

आयतन $= 16\times8\times8 = 128\times8 = 1{,}024\ \text{cm}^3$

प्रश्न 12. यदि घन गोला के परिगत हो, तो घन और गोले के आयतन का अनुपात क्या होगा? (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : माना घन की भुजा $= 2a$

तब गोले की त्रिज्या $= a$

घन का आयतन, $V_1 = (2a)^3 = 8a^3$

गोले का आयतन, $V_2 = \frac{4}{3}\ a^3$

अनुपात, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{8a^3}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{8\times3}{4\pi} = \frac{6}{\pi}$ या 6 : π. उत्तर।

प्रश्न 13. उस गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल निकालें जिसका व्यास 14 सेमी है। (2017A)

हल : $d = 14$ cm

$\therefore \quad r = \frac{d}{2} = \frac{14}{2} = 7cm$

गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल $= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 462$ cm². उत्तर।

प्रश्न 14. दो समान आयतन वाले वृत्ताकार बेलन की ऊँचाइयों का अनुपात 1 : 2 है, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात क्या होगा ? (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : पहले बेलन की त्रिज्या $= r_1$; ऊँचाई $= h_1$

दूसरे बेलन की त्रिज्या $= r_2$; ऊँचाई $= h_2$

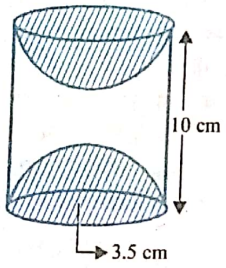
$\therefore$ आयतन $V_1 = \pi r_1^2 h_1$; $V_2 = \pi r_2^2 h_2$

$$\therefore \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r_1^2 h_1}{\pi r_2^2 h_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \left(\frac{h_1}{h_2}\right) \quad \Rightarrow 1 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r_1^2}{r_2^2} = 2 \qquad \therefore \quad \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

अभीष्ट अनुपात $\sqrt{2} : 1$ उत्तर।

प्रश्न 15. लकड़ी के एक ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्द्धगोला खोदकर निकालते हुए एक वस्तु बनाई गई है, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। यदि बेलन की ऊँचाई 10 cm है और आधार की त्रिज्या 3.5 cm है, तो इस वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (M. Q., Set–III : 2015)



हल : तैयार होने पर वस्तु का पृष्ठीय क्षे०

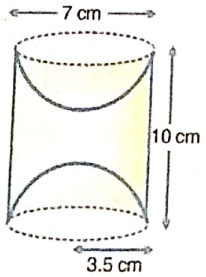
= बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षे०

$+ 2 \times$ अर्द्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षे०

$= 2\pi rh + 2 \times 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h + 2r)$,

जहाँ $r = 3.5$ cm और $h = 10$ cm



$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times (10 + 2 \times 3.5)\ \text{cm}^2$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 17\ \text{cm}^2$$

$= 374$ cm²; उत्तर।

प्रश्न 16. मॉडल बनाने वाली मिट्टी से ऊँचाई 24 सेमी० और आधार त्रिज्या 3 सेमी० वाला एक शंकु बनाया गया है। एक बच्चे ने इसे गोले के आकार में बदल दिया। गोले की त्रिज्या ज्ञात करें। (2014A)

हल : शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \times 3 \times 3 \times 24\ \text{cm}^3$

माना कि r गोले की त्रिज्या है।

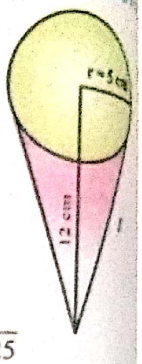
अतः गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$.

$\because$ शंकु के रूप में और गोले के रूप में मिट्टी के आयतन बराबर हैं।

$$\therefore \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi \times 3 \times 3 \times 24$$

$$\therefore \quad r^3 = 3 \times 3 \times 6 \qquad \therefore \quad r = \sqrt[3]{54}\ \text{cm}.$$ उत्तर।

प्रश्न 17. एक लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन 100π सेमी³ है और उसकी 12 सेमी है, तो तिर्यक ऊँचाई निकालें। (2015)



हल : लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$100\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 . 12$$

$$100\pi \times 3 = 12\pi r^2$$

$$r^2 = \frac{100\pi \times 3}{12\pi} = 25$$

$\therefore \quad r = \sqrt{25} = 5$ cm.

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(12)^2 + (5)^2} = \sqrt{144 + 25}$$

$= \sqrt{169} = 13$ cm. उत्तर।

प्रश्न 18. 6 सेमी० त्रिज्या और 24 सेमी० ऊँचाई वाले मिट्टी के शंकु को गोले में बदल दिया गया है। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। (M. Q., Set–I : 201

हल : शंकु के आधार की त्रिज्या $(r_1) = 6$ cm

ऊँचाई $(h) = 24$ cm; गोले की त्रिज्या $= r_2$ (माना)

गोले का आयतन ≡ शंकु का आयतन

$$\frac{4}{3}(r_2)^3 = \frac{1}{3}(r_1)^2 h; \qquad 4(r_2)^3 = (6)^2 \times 24$$

$$(r_2)^3 = \frac{6 \times 6 \times 24}{4} \quad (6)^3; \quad r_2 = 6$$

$\therefore$ गोले की त्रिज्या = 6 सेमी०

प्रश्न 19. 28 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्ताकार तार को सीधा कर पुनः उसे मोड़कर वर्ग बनाया गया है, तो वर्ग की भुजा की लम्बाई ज्ञात करें। (2012C)

हल : वर्ग की परिमिति = वृत्त की परिधि (प्रश्न से)

या, $4 \times$ एक भुजा $= 2\pi r$

या, $4 \times$ एक भुजा $= 2 \times \frac{22}{7} \times 28 = 44 \times 4$

$\therefore$ एक भुजा की लंबाई = 44 सेमी. उत्तर।

प्रश्न 20. उस गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल निकालें जिसका व्यास 14 सेमी है। (2015A)

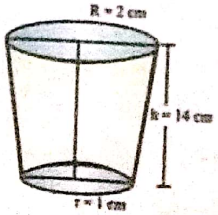
हल : $d = 14$ cm $\qquad \therefore \quad r = \frac{d}{2} = \frac{14}{2} = 7cm$

गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल $= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 462$ cm². उत्तर।

प्रश्न 21. पानी पीने वाला एक गिलास 14 cm ऊँचाई वाले एक शंकु के छिन्नक के आकार का है। दोनों वृत्ताकार सिरों के व्यास 4 cm और 2 cm है। इस गिलास की धारिता ज्ञात कीजिए। (M. Q., Set–V : 2015, M.Q., Set–IV : 2016)

हल : $R = \frac{4}{2} = 2$ cm; $\quad r = 1$ cm; $\quad h = 14$ cm

गिलास की धारिता $= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$



$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14(2^2 + 1^2 + 2 \times 1)$$

$$= \frac{44}{3}(4 + 1 + 2) = \frac{44}{3} \times 7 = \frac{308}{3}$$

$= 102.7$ cm³. उत्तर।

प्रश्न 22. लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन निकालें, जिसकी ऊँचाई 28 सेमी और आधार की त्रिज्या 21 सेमी हों। (2015A)

हल : लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 21\times 21\times 28$

$= 22\times 21\times 28\ cm^3$

$= 12936\ cm^3$ उत्तर।

प्रश्न 23. किसी अर्द्धगोलाकार कटोरे में कितना लीटर दूध समा सकता है यदि व्यास 10.5 सेमी है। (M. Q., Set–II : 2016)

हल : अर्द्धगोलाकार कटोरे का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times\frac{10.5}{2}\times\frac{10.5}{2}\times\frac{10.5}{2}$

$= \frac{50935.5}{168} = 303.19\ cm^3$ उत्तर।

प्रश्न 24. 14 सेमी लम्बे वृत्ताकार समबेलन का आयतन, 11 सेमी किनारे के घन के आयतन के बराबर है, तो बेलन का त्रिज्या निकालें। (M. Q., Set–III : 2016)

हल : घन का आयतन $= (\text{भुजा})^3 = (11)^3 = 11\times 11\times 11 = 1331\ cm^3$

प्रश्न से,

बेलन का आयतन = घन का आयतन

$\Rightarrow \pi r^2 h = 1331 \quad \Rightarrow \frac{22}{7}\times 14 r^2 = 1331$

$\Rightarrow 22\times 2r^2 = 1331 \quad r^2 = \frac{1331}{22\times 2} = \left(\frac{11}{2}\right)^2$

$\therefore\ r = \frac{11}{2} = 5.5$ cm. उत्तर।

प्रश्न 25. 3.5 सेमी त्रिज्या वाले अर्द्धगोले का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल निकालें। (M. Q., Set–V : 2016)

हल : अर्द्धगोले का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

$= 2\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5 = \frac{539}{7}$

$= 77$ cm उत्तर।

प्रश्न 26. एक गोले का व्यास 6 सेमी है। इसे पिघलाकर 0.2 सेमी व्यास वाला एक तार बनाया गया है। तार की लम्बाई ज्ञात करें। (2016A)

हल : d = 6 cm; $\quad r = \frac{d}{2} = \frac{6}{2} = 3cm$

गोला का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\times\pi\times 3\times 3\times 3 = 36\pi\ cm^3$.

पुन: d = 0.2 cm; $\quad r = \frac{d}{2} = \frac{0.2}{2} = 0.1cm$

0.2 cm व्यास वाले तार का आयतन $= \frac{4}{3}\times\pi\times.1\times.1\times.1 = \frac{0.004}{3}\pi$

तार की लम्बाई $= \frac{\text{गोले का आयतन}}{0.2\,cm \text{ व्यास वाले तार का आयतन}}$

$= \frac{36\pi}{\frac{0.004\pi}{3}} = \frac{36\times 3}{0.004} = \frac{36\times 3\times 1000}{4}$

$= 27000\ cm = 270 m$ उत्तर।

प्रश्न 27. धातु के तीन घनों के किनारे की लम्बाइयाँ क्रमश: 3 सेमी०, 4 सेमी० और 5 सेमी० हैं। तीनों को पिघलाकर एक नया घन बनाया गया है, तो नये घन के किनारे की लम्बाई क्या होगी ? (2016A)

हल : नये घन का आयतन = तीनों घनों के आयतन का योग

$= (3)^3 + (4)^3 + (5)^3$

$= 27 + 64 + 125 = 216$

नये घन की एक भुजा $= \sqrt[3]{\text{घन का आयतन}} = \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6\times 6\times 6}$

$= 6$ cm. उत्तर।

प्रश्न 28. एक तार वृत्त के रूप में है जिसकी त्रिज्या 84 सेमी है। उस वर्ग की भुजा ज्ञात करें जो तार को मोड़कर बनाया जा सकता है। (2016A)

हल : $r = 84$ cm

वृत्त की परिधि $= 2\pi r = 2\times\frac{22}{7}\times 84 = 2\times 22\times 12 = 528$ cm

वर्ग की परिमाप = वृत्त की परिधि = 528 cm

$\therefore$ वर्ग की एक भुजा $= \frac{\text{वर्ग की परिमाप}}{4} = \frac{528}{4}\times 132$ cm. उत्तर।

प्रश्न 29. 8 सेमी० किनारे वाले एक घन को 2 सेमी० किनारे वाले कितने घनों में रूपांतरित किया जा सकता है ? (2016C)

हल : 8 सेमी० घन का आयतन $= a^3 = (8)^3$

2 सेमी० घन का आयतन $= (2)^3$

$\therefore$ 2 सेमी० वाले घनों की संख्या $= \frac{8 \text{ सेमी० घन का आयतन}}{2 \text{ सेमी० घन का आयतन}}$

$= \frac{(8)^3}{(2)^3} = \frac{8\times 8\times 8}{2\times 2\times 2} = 64.$ उत्तर।

सांख्यिकी

प्रश्न 1. दिये गये आँकड़े 1, 0, 5 का माध्य लिखें। (2013A)

हल : $\frac{1+0+5}{3} = \frac{6}{3} = 2$

प्रश्न 2. एक टीम फुटबॉल ने 10 मैचों में निम्नलिखित गोल किए : 2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3 सबसे ज्यादा बार उस टीम ने कितने गोल किये। (M. Q., Set–I : 2011)

हल : 4 बार 3 गोल किये। उत्तर = 3.

प्रश्न 3. 7 छात्रों का औसत भार 56 किलोग्राम है। उसमें 6 छात्रों का भार क्रमश: 52, 58, 55, 53, 56 तथा 54 किलोग्राम है। सातवें छात्र का भार ज्ञात करें। (M. Q., Set–IV : 2016)

हल : 7 छात्रों का कुल भार = 7 × 56 = 392 kg

6 छात्रों का कुल भार = 52 + 58 + 55 + 53 + 56 + 54 kg = 328 kg

सातवें छात्र का भार = 392 kg – 328 kg = 64 kg उत्तर।

प्रश्न 4. बहुलक के किन्हीं दो गुण एवं दो दोषों को लिखें। (M. Q., Set–III : 20[illegible])

हल : बहुलक के दो गुण :

(i) दैनिक जीवन में उपयोगी–अपनी सरलता के कारण यह हमारे दैनिक जीवन में काफी प्रयोग में आता है।

(ii) सबसे अच्छा प्रतिनिधित्व–यह समूह का सबसे अच्छे ढंग से प्रतिनिधित्व करता है, क्योंकि यह सबसे अधिकतम बारंबारता वाले पद का मान है।

बहुलक के दो दोष :

(i) अनिश्चितता इसका निश्चित न होना सबसे बड़ा दोष है।

(ii) चरम मानों की अवहेलना–यह गुण गणितीय दृष्टि से दोष भी बन जाता है।

प्रश्न 5. यदि किसी सममित बंटन का माध्य और माध्यक क्रमशः 26.8 और 27.9 है तो बहुलक निकालें। (M. Q., Set–I : 2015)

हल : 3 माध्यक = बहुलक + 2 माध्य

$3 \times 27.9 = \text{बहुलक} + 2 \times 26.8$

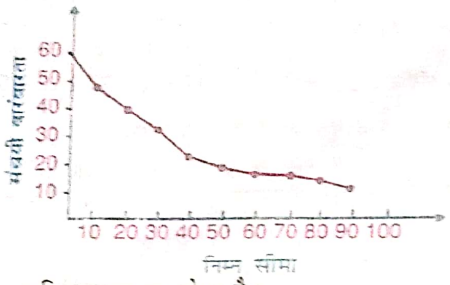
बहुलक $= 83.7 - 53.6 = 30.1$ उत्तर।

प्रश्न 6. 2, 3, 4, 6, 7, 6, 5, 9 का माध्यक निकालें।

(M. Q., Set–III : 2015)

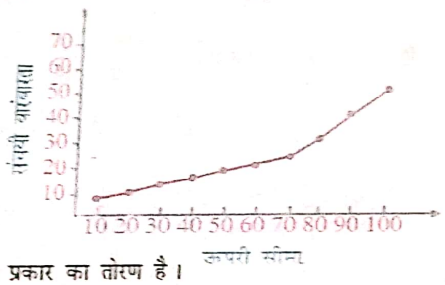
हल : माध्यक $= \dfrac{2+3+4+6+7+6+5+9}{8} = \dfrac{42}{8} = 5.3.$ उत्तर।

प्रश्न 7. यह किस प्रकार का तोरण है ?



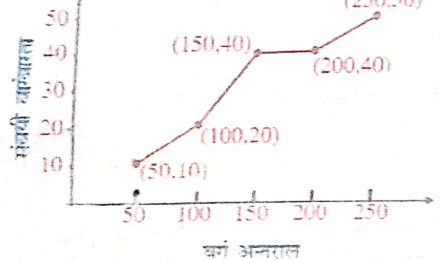
हल : अधिक प्रकार का तोरण है।

प्रश्न 8. यह किस प्रकार का तोरण है ?



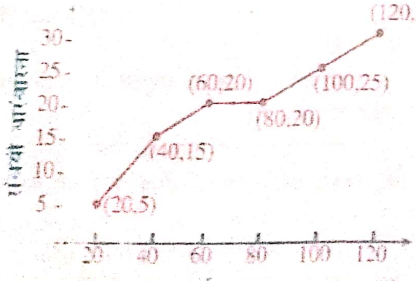
हल : कम प्रकार का तोरण है।

प्रश्न 9. नीचे दिये गए तोरण से संचयी बारंबारता 20 का वर्ग अंतराल लिखिए।



हल : 20 संचयी बारंबारता का वर्ग अंतराल = 50 – 100.

प्रश्न 10. नीचे दिये गए तोरण से वर्ग अंतराल 60–80 की बारंबारता लिखिए।



हल : बारंबारता = 20 – 20 = 0.

प्रश्न 11. 2, 3, 4, 6, 8, 7, 6, 5, 3, 9 का माध्यक निकालें।

(M. Q., Set–V : 20

हल : माध्यक $= \dfrac{2\times1+3\times2+4\times1+5\times1+6\times2+7\times1+8\times1+9\times}{1+2+1+1+2+1+1+1}$

$= \dfrac{2+6+4+5+12+7+8+9}{10} = \dfrac{53}{10} = 5.3$ उत्तर

प्रश्न 12. प्रथम पाँच सम प्राकृतिक संख्याओं का माध्य ज्ञात करें। (2012

हल : माध्य $= \dfrac{2+4+6+8+10}{5} = \dfrac{30}{5} = 6.$ उत्तर।

प्रश्न 13. निम्नलिखित अवर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात करें।

18, 13, 17, 12, 16, 19. (2012

हल : आरोही क्रम में सजाने पर आँकड़े 12, 13, 16, 17, 18, 19

यहाँ $N = 6$ जो सम संख्या है।

$\therefore \quad \dfrac{N}{2} = \dfrac{6}{2} = 3; \qquad \dfrac{N}{2}+1 = 3+1 = 4$

$\therefore$ माध्यिका $= \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{N}{2}\text{वाँ चर} + \left(\dfrac{N}{2}+1\right)\text{वाँ चर}\right]$

$= \dfrac{1}{2}[3\text{रा पद} + 4\text{था पद}] = \dfrac{16+17}{2} = \dfrac{33}{2} = 16.5$ उत्तर

प्रश्न 14. यदि वितरण 40, 15, 18, 22, 29, x, 32, y तथा 29 का समानांतर माध्य 25 है तो $x + y$ का मान निकालें। (M. Q., Set–I : 2015

M.Q., Set–II : 2016

हल : $25 = \dfrac{40+15+18+22+29+x+32+y+29}{9}$

$\Rightarrow \quad 25 = \dfrac{185+x+y}{9} \qquad \Rightarrow \quad 225 - 185 = x+y$

$\therefore \quad x + y = 40.$ उत्तर।

प्रश्न 15. 7 छात्रों का औसत भार 55 किलोग्राम है। इनमें 6 छात्रों के भार क्रमशः 52, 58, 55, 53, 56 और 54 किलोग्राम हैं। सातवें छात्र का भार ज्ञात करें। (2012A)

हल : सूत्र से, $x = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_7}{7}$

या, $55 = \dfrac{52+58+55+53+56+54+x}{7}$

या, $55 \times 7 = 328 + x \qquad$ या, $385 = 328 + x$

$\therefore \quad x = 385 - 328 = 57$ किग्रा॰ उत्तर।

प्रश्न 16. $x + 2$, $2x + 3$, $4x + 5$ और $5x + 2$ का गणितीय माध्य निकालें। (M. Q., Set–II : 2015)

हल : $M = \dfrac{x+2+2x+3+4x+5+5x+2}{4}$

$= \dfrac{12x+12}{4} = 3x+3$ उत्तर।

प्रश्न 17. यदि किसी वितरण का बहुलक 35.45 और माध्य 35.6 है तो वितरण का माध्यक निकालें। (2015C

हल : बहुलक = 3 × माध्यक – 2 × माध्य

$Mo = 3M - 2A$

$35.45 = 3M - 2 \times 35.6$

$\Rightarrow \quad 35.45 = 3M - 71.2 \qquad \Rightarrow \quad 35.45 + 71.2 = 3M$

$\therefore \quad M = \dfrac{106.65}{3} = 35.55.$ उत्तर।

प्रश्न 18. निम्नलिखित बंटन का माध्य 50 हो तो f का मान मालूम करें :

वर्ग	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
बारंबारता	17	28	32	f	19

(M. Q., Set–IV : 2011, 2013C)

हल :

वर्ग	वर्ग-चिह्न x	बारम्बारता f	fx
0—20	10	17	170
20—40	30	28	840
40—60	50	32	1600
60—80	70	f	$70f$
80—100	90	19	1710
योग	—	$96+f$	$4320+70f$

$$\text{माध्य} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

$$\Rightarrow 50 = \frac{4320+70f}{96+f}$$

$$\Rightarrow 4800 + 50f = 4320 + 70f$$

$$\Rightarrow 70f - 50f = 4800 - 4320$$

$$20f = 480$$

$$\therefore f = \frac{480}{20} = 24 \quad \text{उत्तर ।}$$

प्रश्न 19. किसी कारखाना के 50 कर्मचारियों की दैनिक मजदूरी का वितरण निम्नलिखित है : (2011C)

दैनिक मजदूरी (रु. में)	100 – 120	120 – 140	140 – 160
कर्मचारियों की संख्या	12	14	8
		160 – 180	180 – 200
		6	10

कारखाना के कर्मचारियों की दैनिक मजदूरी का माध्य ज्ञात करें।

हल : सारणी में कल्पित माध्य a = 150 (बीचवाला वर्ग-चिह्न) तथा l = वर्ग-लंबाई = 20 लेते हुए विचलन $d = x - 150$ एवं $d' = d/l = d/20$ निकाला जाएगा।

वर्ग	वर्ग-चिह्न (x)	बारंबारता (f)	कल्पित माध्य 150 से विचलन $d = x - 150$	$d' = \frac{d}{l} = \frac{d}{20}$	fd'
100 –120	110	12	–40 = (110 – 150)	–2	– 24
120 –140	130	14	–20 = (130 – 150)	–1	– 14
140 – 160	150	8	0 = (150 – 150)	0	0
160 – 180	170	6	20 = (170 – 150)	1	6
180 – 200	190	10	40 = (190 – 150)	2	20

$\Sigma f = 50$ $\qquad$ $\Sigma fd' = -12$

$$\therefore \text{माध्य } A = a + l\frac{\Sigma fd'}{\Sigma f} = 150 + 20 \times \frac{-12}{50} = 150 - 4.8 = 145.2$$

अतः माध्य मजदूरी = 145.20 रु० उत्तर।

प्रश्न 20. निम्नलिखित सारणी से समान्तर माध्य निकालें—

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0–10	10
10–20	20
20–30	14
30–40	06

(M. Q., Set–II : 2011)

हल :

अंक	वर्ग-चिह्न x	बारम्बारता f	fx
0—10	5	10	50
10—20	15	20	300
20—30	25	14	350
30—40	35	06	210
योग	—	50	910

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{910}{50} = 18.2$$

प्रश्न 21. दिये गये आँकड़े का माध्य ज्ञात करें :

वर्ग अंतराल	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
मनुष्यों की संख्या	5	10	25	5	11

(2016A)

हल :

वर्ग-अंतराल	वर्ग-चिह्न (x)	बारंबारता (f)	वर्ग चिह्न × बारंबारता $x \times f$
0-10	5	5	25
10-20	15	10	150
20-30	25	25	625
30-40	35	5	175
40-50	45	11	495
		$\Sigma f = 56$	$\Sigma fx = 1470$

$$\text{माध्य} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{1470}{56} = 26.25 \quad \text{उत्तर ।}$$

प्रश्न 22. निम्नलिखित बारंबारता बंटन का माध्य निकालें : (2015C)

वर्ग-अंतराल	6-10	10-14	14-18	18-22	22-26
बारंबारता	2	5	12	16	25

हल :

वर्ग अंतराल	वर्ग-चिह्न (x)	बारंबारता (f)	fx
6-10	8	2	16
10-14	12	5	60
14-18	16	12	192
18-22	20	16	320
22-26	24	25	600
	योग	$\Sigma f = 60$	$\Sigma fx = 1188$

$$A = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{1188}{60} = 19.8 \quad \text{उत्तर ।}$$

प्रश्न 23. निम्नलिखित बारंबारता-वितरण किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्ताओं की बिजली की मासिक खपत दर्शाता है। इनका माध्य ज्ञात कीजिए। **(2014A)**

मासिक खपत (यूनिट में)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120	120-140
उपभोक्ता की संख्या	3	6	14	20	13	7	5

हल :

मासिक खपत यूनिट	उपभोक्ता (f)	वर्ग-चिह्न (x)	fx
0-20	3	10	30
20-40	6	30	180
40-60	14	50	700
60-80	20	70	1400
80-100	13	90	1170
100-120	7	110	770
120-140	5	130	650
योग	$\Sigma f = 68$		$\Sigma fx = 4900$

माध्य $\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{4900}{68} = 72.058$. उत्तर।

प्रश्न 24. निम्नलिखित बारंबारता बंटन का समानान्तर माध्य ज्ञात करें : **(2012A)**

प्राप्तांक	10 से कम	20 से कम	30 से कम	40 से कम
छात्र संख्या	25	40	60	75
	50 से कम	60 से कम	70 से कम	80 से कम
	95	125	190	240

हल :

वर्ग-अन्तराल	वर्ग-चिह्न (x)	मध्यमान (कल्पित माध्य) का विचलन d	बारंबारता f	fd
0–10	5	–40	25	–1000
10–20	15	–30	15	– 450
20–30	25	–20	20	– 400
30–40	35	–10	15	– 150
40–50	45	0	20	0
50–60	55	10	30	300
60–70	65	20	65	1300
70–80	75	30	50	1500
			$\Sigma f = 240$	$\Sigma fd = 1100$

माना कि $A = 45$

समानान्तर माध्य $= A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f} = 45 + \frac{1100}{240}$

$= 45 + 4.58 = 49.58$. उत्तर।

प्रश्न 25. माध्य ज्ञात करें— **(M. Q., Set–I : 2011)**

वर्ग-अंतराल	बारम्बारता
0 – 10	9
10 – 20	3
20 – 30	4
30 – 40	2
40 – 50	2

हल :

वर्ग-अन्तराल	बारम्बारता	वर्ग-चिह्न x	$f \times x$
0-10	9	5	45
10-20	3	15	45
20-30	4	25	100
30-40	2	35	70
40-50	2	45	90
	20		350

माध्य $= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{350}{20} = 17.5$. उत्तर।

प्रश्न 26. निम्नलिखित बारंबारता बंटन किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्ताओं की बिजली की मासिक खपत दर्शाता है। इनका माध्य ज्ञात कीजिए : **(2014C)**

मासिक खपत (यूनिट में)	5 – 25	25 – 45	45 – 65	65 – 85
उपभोक्ता की संख्या	4	5	10	21
		85 – 105	105 – 125	125 – 145
		15	7	6

हल :

मासिक खपत	वर्ग-चिह्न (x)	बारम्बारता (f)	$f.x$
5—25	15	4	60
25—45	35	5	175
45—65	55	10	550
65—85	75	21	1575
85—105	95	15	1425
105—125	115	7	805
125—145	135	6	810
योग		$\Sigma f = 68$	$\Sigma fx = 5400$

माध्य $\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{5400}{68} = 79.411$ उत्तर।

प्रश्न 27. दिये गये बंटन का माध्य 52 है, तो अज्ञात बारंबारता निकालें : **(2015A)**

प्राप्तांक	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
विद्यार्थियों की संख्या	5	3	4	—	2	6	13

हल : माना कि अज्ञात बारंबारता = x है।

वर्ग-अन्तराल	वर्ग-चिह्न x	बारंबारता f	fx
10-20	15	5	75
20-30	25	3	75
30-40	35	4	140
40-50	45	x	$45x$
50-60	55	2	110
60-70	65	6	390
70-80	75	13	975
योग		$\Sigma f = 33+x$	$\Sigma fx = 1765+45x$

माध्य $= \frac{\Sigma xf}{\Sigma f}$; $52 = \frac{1765+45x}{33+x}$

$\Rightarrow 52(33+x) = 1765 + 45x$

$\Rightarrow 1716 + 52x = 1765 + 45x$

$\Rightarrow 52x - 45x = 1765 - 1716$

$\Rightarrow 7x = 49$ $\quad \therefore x = \frac{49}{7} = 7$ उत्तर।

प्रश्न 28. निम्नलिखित बंटन का माध्य 50 हो, तो f का मान ज्ञात कीजिए : (2013C)

वर्ग अंतराल :	65 – 85	85 – 105	105 – 125	125 – 145
बारम्बारता :	4	5	13	20
		145 – 165	165 – 185	185 – 205
		14	8	4

हल :

वर्ग-अंतराल (इकाइयों में)	बारंबारता की संख्या f_i	वर्ग चिह्न x_i	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$ या $u_i = \frac{x_i - 135}{20}$	$f_i u_i$
65 – 85	4	75	– 3	– 12]
85 – 105	5	95	– 2	– 10] –35
105 – 125	13	115	– 1	– 13
125 – 145	20	135	0	0
145 – 165	14	155	1	14]
165 – 185	8	175	2	16] 42
185 – 205	4	195	3	12
योग	$\Sigma f_i = 68$			$\Sigma f_i u_i = 7$

उपर्युक्त आँकड़ों से, कल्पित मान $(a) = 135$

वर्ग माप $(h) = 20$

$\therefore \quad \bar{u} = \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} = \frac{7}{68} = 0.102$

सूत्र का प्रयोग करने पर, माध्य $(\bar{X}) = a + h\bar{u} = 135 + 20\,(0.102)$

$= 135 + 2.04 = 137.04$. उत्तर।

प्रश्न 29. निम्नलिखित बंटन का समान्तर माध्य 50 है, तो लुप्त बारंबारता f का मान निकालें : (2015A)

वर्ग-अंतराल	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
बारम्बारता	17	f	32	24	19

हल :

वर्ग-अंतराल	वर्ग-चिह्न x	बारंबारता f	xf
0-20	10	17	170
20-40	30	f	$30f$
40-60	50	32	1600
60-80	70	24	1680
80-100	90	19	1710
योग		$\Sigma f = 92 + f$	$\Sigma fx = 5160 + 30f$

माध्य $= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{5160 + 30f}{92 + f}$

$\Rightarrow 50\,(92 + f) = 5160 + 30f$

$\Rightarrow 4600 + 50f = 5160 + 30f$

$\Rightarrow 50f - 30f = 5160 - 4600$

$\Rightarrow 20f = 560$ $\quad \therefore f = \frac{560}{20} = 28$ उत्तर।

प्रश्न 30. निम्नलिखित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों के दैनिक जेब खर्च दर्शाता है। यदि माध्य जेब खर्च 18 रु. हो, तो लुप्त बारम्बारता का मान ज्ञात करें : (2012C, 2016C)

दैनिक जेब खर्च (रुपये में)	11–13	13 – 15	15 – 17	17 – 19
बच्चों की संख्या	7	6	9	13
		19 – 21	21 – 23	23 – 25
		f	5	4

अथवा, दी गई आँकड़ों का माध्य 18 है, तो अज्ञात बारंबारता ज्ञात करें : (2016A)

वर्ग अंतराल	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

हल :

c.i	11–13	13 – 15	15 – 17	17 – 19	19 – 21	21 – 23	23 – 25
x	12	14	16	18	20	22	24
f	7	6	9	13	f	5	4
fx	84	84	144	234	$20f$	110	96

माध्य $= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$; $18 = \frac{20f + 752}{44 + f}$; $f = 20$. उत्तर।

प्रश्न 31. 30 विद्यार्थियों का भार सारणी में दिया गया है–

वजन	40-45	45-50	50 - 55	55-60	60-65	65-70	70-75
विद्यार्थी की सं॰	2	3	8	6	6	3	2

विद्यार्थी का माध्य ज्ञात करें। (M. Q., Set–III : 2016, 2017A)

हल :

वर्ग अन्तराल	वर्ग-चिह्न x	संचयी बारंबारता	बारंबारता f	$x \times f$
40-45	42.5	2	2	85
45-50	47.5	5	3	142.5
50-55	52.5	13	8	420
55-60	57.5	19	6	345
60-65	62.5	25	6	375
65-70	67.5	28	3	202.5
70-75	72.5	30	2	145
		योग	$\Sigma f = 30$	$\Sigma fx = 1715$

माध्य $= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{1715}{30} = 57.17$. उत्तर।

प्रश्न 32. निम्नलिखित बारंबारता बंटन किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्ताओं के बिजली की खपत दर्शाता है। इनका माध्य ज्ञात कीजिए। (2014A)

मासिक खपत (यूनिट में)	15-35	35-55	55-75	75-95	95-115	115-135	135-155
उपभोक्ता की संख्या	2	7	13	19	15	9	3

हल :

मासिक खर्चा	उपभोक्ता की संख्या (f)	वर्ग-चिह्न (x)	fx
15-35	2	25	50
35-55	7	45	315
55-75	13	65	845
75-95	19	85	1615
95-115	15	105	1575
115-135	9	125	1125
135-155	3	145	435
योग	$\Sigma f = 68$		$\Sigma fx = 5960$

माध्य $\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{5960}{68} = 87.647$. उत्तर।

प्रश्न 33. निम्नांकित संचयी बारंबारता सारणी का माध्य निकालें।

(M. Q., Set-I & V : 2016)

प्राप्तांक	20 से नीचे	40 से नीचे	60 से नीचे	80 से नीचे	100 से नीचे
विद्यार्थियों की संख्या	10	30	35	40	45

हल :

वर्ग-अन्तराल	बारंबारता f	वर्ग चिह्न x	fx
0-20	10	10	100
20-40	20	30	900
40-60	5	50	1750
60-80	5	70	2800
80-100	5	90	4050
योग	$\Sigma f = 45$		$\Sigma fx = 9600$

माध्य $= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{9600}{45} = 213.33$. उत्तर।

प्रश्न 34. निम्न बारंबारता वंटन सारणी से माध्य ज्ञात करें : (2017A)

वर्ग-अंतराल	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
बारंबारता	2	3	7	6	6	6

हल :

वर्ग-अंतराल	वर्ग-चिन्ह (x)	बारम्बारता (f)	fx
10-25	17.5	2	35
25-40	32.5	3	97.5
40-55	47.5	7	332.5
55-70	62.5	6	375
70-85	77.5	6	465
85-100	92.5	6	555
योग	—	30	1860

माध्य $= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{1860}{30} = 62$ उत्तर।

प्रश्न 35. यदि नीचे दिए गए वंटन का माध्यक 28.5 हो, तो x और y का मान ज्ञात कीजिए : (2014A)

वर्ग-अंतराल	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	योग
आवृत्ति	4	x	20	16	y	5	60

हल :

वर्ग-अन्तराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
10-20	4	4
20-30	x	4 + x
30-40	20	24 + x
40-50	16	40 + x
50-60	y	40 + x + y
60-70	5	45 + x + y
योग	$\Sigma f = 60 = n$	

दिये गये आँकड़ों में $n = \Sigma f = 60$

$\therefore \frac{n}{2} = \frac{60}{2} = 30$ और वंटन का माध्यक = 28.5

$\therefore$ माध्यक वर्ग = 20 – 30

अतः $l = 20$, $f = x$, $c.f. = 4$, $h = 10$

और $45 + x + y = 60$ $\therefore$ $x + y = 15$ ...(1)

सूत्र से,

$$\text{माध्यक} = l + \left\{\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right\} \times h = 20 + \left\{\frac{30-4}{x}\right\} \times 10$$

$$\Rightarrow \quad 28.5 = 20 + \left\{\frac{30-4}{x}\right\} \times 10$$

$$\Rightarrow \quad 28.5 = 20 + \frac{26}{x} \times 10 \quad \Rightarrow \quad 28.5 = 20 + \frac{260}{x}$$

$$\Rightarrow \quad 28.5 = 20x + 260 \quad \Rightarrow \quad 20x = 260 - 28.5 = 231.5$$

$$\therefore \quad x = \frac{231.5}{20} = 11.58$$

समीकरण (1) से,

$x + y = 15$ $\qquad$ $11.58 + y = 15$

$\therefore$ $y = 15 - 11.58 = 3.42$ $\therefore$ $x = 11.58$ और $y = 3.42$. उत्तर।

प्रश्न 36. निम्नलिखित वितरण से माध्यिका निकालें—

मजदूरी (रु० में)	200–300	300–400	400–500	500–600	600–700
मजदूरों की संख्या	3	5	20	10	6

(M. Q., Set-II : 2011)

हल :

मजदूरी वर्गान्तर	बारंबारता	संचयी बारंबारता
200—300	3	3
300—400	5	8
400—500	20	28
500—600	10	38
600—700	6	44
योग	44	—

$$\text{माध्यिका} = l + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times i = 400 + \frac{22-8}{20} \times 100$$

$= 400 + 14 \times 5 = 400 + 70 = 470$ रु० उत्तर।

KATI BOOK DEPOT

प्रश्न 37. यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो, तो x और y का मान ज्ञात कीजिए : **(2014A)**

C.I.	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	योग
f	5	x	22	13	y	5	60

हल :

वर्ग-अन्तराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
5-15	5	5
15-25	x	5 + x
25-35	22	27 + x
35-45	13	40 + x
45-55	y	40 + x + y
55-65	5	45 + x + y
योग	$\Sigma F_i = 60 = n$	

दिये गये आँकड़ों में $n = \Sigma F_i = 60$

$\therefore \quad \frac{n}{2} = \frac{60}{2} = 30$ और बंटन का माध्यक = 28.5

$\therefore$ माध्यक वर्ग = 25 – 35

अतः $l = 25, \quad f = 22, \quad cf = 5 + x, \quad h = 10$

और $45 + x + y = 60$

$\therefore \quad x + y = 15$ ...(1)

सूत्र से,

$$\text{माध्यक} = l + \left\{\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right\} \times h = 25 + \left\{\frac{30 - (5+x)}{22}\right\} \times 10$$

$$\Rightarrow \quad 28.5 = 25 + \left\{\frac{30 - 5 - x}{22}\right\} \times 10$$

$$\Rightarrow \quad 28.5 = 25 + \frac{25 - x}{11} \times 5 = 25 + \frac{125 - 5x}{11}$$

$$= \frac{275 + 125 - 5x}{11} = \frac{400 - 5x}{11}$$

$\Rightarrow \quad 313.5 = 400 - 5x \quad \Rightarrow \quad 313.5 - 400 = -5x$

$\Rightarrow \quad +86.5 = +5x \quad \therefore \quad x = \frac{86.5}{5} = 17.3.$

समीकरण (1) से,

$x + y = 15; \quad 17.3 + y = 15$

$\therefore \quad y = 15 - 17.3 = -2.3 \quad \therefore \quad x = 17.3, y = -2.3.$ उत्तर।

प्रश्न 38. यदि नीचे दिये हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो, तो x और y का मान ज्ञात कीजिए : **(2014C)**

वर्ग-अन्तराल :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40
बारंबारता :	4	x	21	15
		40 – 50	50 – 60	योग
		y	5	60

हल :

वर्ग-अन्तराल	बारंबारता (f)	संचयी बारंबारता ($c.f$)
0 – 10	4	4
10 – 20	x	$4 + x$
20 – 30	21	$25 + x$
30 – 40	15	$40 + x$
40 – 50	y	$40 + x + y$
50 – 60	5	$45 + x + y$
कुल	60	

$45 + x + y = 60$

$\therefore \quad x + y = 60 - 45 = 15 \quad \therefore \quad y = 15 - x$ ...(1)

माध्यक = 28.5 (दिया हुआ है), N = 60

$\therefore \quad \frac{N}{2} = \frac{60}{2} = 30$ माध्यक वर्ग = 20 – 30 है।

$$\text{माध्यक} = l + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times 10$$

$$28.5 = 20 + \frac{\frac{60}{2} - (4 + x)}{21}$$

$$\Rightarrow \quad 28.5 = 20 + \frac{30 - 4 - x}{21} \times 10$$

$$\Rightarrow \quad 28.5 = 20 + \frac{26 - x}{21} \times 10 = 20 + \frac{260 - 10x}{21}$$

$$\Rightarrow \quad 28.5 = \frac{420 + 260 - 10x}{21}$$

$\Rightarrow \quad 598.5 = 680 - 10x; \quad -81.5 = -10x$

$\therefore \quad x = \frac{81.5}{10} = 8.15$

समीकरण (1) से,

$y = 15 - 8.15 = 6.85 \quad \therefore \quad x = 8.15$ और $y = 6.85.$ उत्तर।

प्रश्न 39. माध्यक निकालें : **(M. Q. Set–IV : 2015)**

वर्ग-अंतराल	40–45	45–50	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75
बारंबारता	2	3	8	6	6	3	2

हल :

वर्ग-अंतराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
40 – 45	2	2
45 – 50	3	5
50 – 55	8	13 = cf
l = 55 – 60	6	19 = f
60 – 65	6	25
65 – 70	3	28
70 – 75	2	30
	N = 30	

$\frac{N}{2} = \frac{30}{2} = 15$

$$\text{माध्यक} = l + \frac{N/2 - cf}{f} \times i = 55 + \frac{15 - 13}{6} \times 5 = 55 + \frac{2 \times 5}{6} = 55 + \frac{10}{6}$$

$= 55 + 1.66 = 56.66.$ उत्तर।

प्रश्न 40. नीचे दिया हुआ बंटन एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों के भार दर्शा रहा है : (2013A)

भार (किग्रा में)	40–45	45 – 50	50 – 55	55– 60
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	8	6

60 – 65	65 – 70	70 – 75
6	3	2

विद्यार्थियों के भार की माध्यिका ज्ञात कीजिये।

हल :

वर्ग-अन्तराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
40 – 45	2	2
45 – 50	3	5
50 – 55	8	13
55 – 60	6	19
60 – 65	6	25
65 – 70	3	28
70 – 75	2	30
	N = 30	

माध्यिका वर्ग वह वर्ग-अन्तराल होगा जिसकी संचयी बारंबारता $\frac{30}{2}=15$ से ठीक बड़ी होगी। अत: माध्यिका वर्ग 55 – 60 होगी।

प्रश्नानुसार,

$l = 55,\ N = 30,\ F = 13,\ f = 6,\ i = 5$

$$\text{माध्यिका (M)} = l + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times i$$

$$= 55 + \frac{\frac{30}{2} - 13}{6} \times 5 = 55 + \frac{15-13}{6} \times 5$$

$$= 55 + \frac{2}{6} \times 5 = 55 + \frac{1}{3} \times 5 = 55 + \frac{5}{3}$$

$$= 55 + 1.66 = 56.66$$ उत्तर।

प्रश्न 41. निम्नलिखित बंटन का माध्यक निकालें : (2015A)

वर्ग अंतराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारंबारता	10	5	8	13	14

हल :

वर्ग	बारंबारता	संचयी बारंबारता
0-10	10	10
10-20	5	15
20-30	8	23
30-40	13	36
40-50	14	50
योग	$N = \Sigma f = 50$	

यहाँ $\frac{n}{2} = \frac{50}{2} = 25$

अब संचयी बारंबारता स्तम्भ से हम पाते हैं कि 25 से ठीक बड़ी संचयी बारंबारता 36 वाला वर्ग अन्तराल 30 – 40 है।

माध्यिका वर्ग = 30 – 40 के लिए,

$l = 30, f = 13,\ F = 23,\ i = 10$

$$\text{माध्यिका } M = l + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times i = 30 + \frac{25-23}{13} \times 10$$

$$= 30 + \frac{2}{13} \times 10 = 30 + 1.538 = 31.538$$ उत्तर।

प्रश्न 42. यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो; तो x और y के मान ज्ञात कीजिए : (M. Q. Set–V : 2015)

वर्ग-अन्तराल	बारंबारता
0 – 10	5
10 – 20	x
20 – 30	20
30 – 40	15
40 – 50	y
50 – 60	5
योग	60

हल :

वर्ग-अंतराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
0 – 10	5	5
10 – 20	x	$x + 5$
20 – 30	20	$x + 25$
30 – 40	15	$x + 40$
40 – 50	y	$x + y + 40$
50 – 60	5	$x + y + 45 = 60$

$\therefore$ N = 60 तथा $x + y + 45 = 60$

$\Rightarrow x + y = 60 - 45 \quad \Rightarrow x + y = 15$

माध्यक = 28.5 है; माध्यक वर्ग है = 20 – 30

$l = 20,\ N = 60;\ cf = x + 5;\ f = 20;\ i = 10$

$$\text{माध्यक} = l + \frac{N/2 - cf}{f} \times i$$

$$28.5 = 20 + \left[\frac{30 - (x+5)}{20}\right] \times 10$$

$$\Rightarrow 28.5 - 20 = \frac{30 - x - 5}{20} \times 10$$

$$\Rightarrow 8.5 = \frac{25 - x}{2} \quad \Rightarrow 8.5 \times 2 = 25 - x$$

$\Rightarrow 17 = 25 - x$

$\therefore x = 25 - 17 = 8$ तथा $y = 15 - 8 = 7$ उत्तर।

प्रश्न 43. निम्नांकित वितरण का बहुलक ज्ञात करें :

वर्ग	6–10	11–15	16–20	21–25	26–30
बारंबारता	2	4	7	3	2

(M. Q., Set–V : 2011)

हल : बहुलक वर्ग = 16 – 20 या, 16.5 – 20.5

$$\text{बहुलक} = l + \frac{f_0 - f_1}{2f_0 - f_1 - f_2} \times h = 16.5 + \frac{7-4}{2 \times 7 - 4 - 3} \times 5$$

$$= 16.5 + \frac{3 \times 5}{7} = 16.5 + 2.14 = 18.64.$$ उत्तर।

प्रश्न 44. किसी गेंदबाज द्वारा 10 क्रिकेट मैचों में लिए गए विकेटों की संख्या 2, 6, 4, 5, 0, 2, 1, 3, 2, 3 हैं।
इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए। **(2011A)**

हल :

विकेटों की संख्या	मैचों की संख्या
0	1
1	1
2	3
3	2
4	1
5	1
6	1

चूँकि गेंदबाज द्वारा 2 विकेट सबसे अधिक मैंचों में (3 मैच) में लिया गया है। अत: बहुलक = 2 उत्तर।

प्रश्न 45. निम्नांकित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करें : **(2013C)**

वर्ग :	11 – 15	16 – 20	21 – 25	26 – 30	31 – 35	36 – 40
संचयी बारंबारता	7	17	28	50	55	60

हल :

वर्ग-अन्तराल	संचयी बारंबारता	बारंबारता
10.5—15.5	7	7
15.5—20.5	17	10
20.5—25.5	28	11
25.5—30.5	50	22
30.5—35.5	55	5
35.5—40.5	60	5

यहाँ सर्वाधिक बारंबारता वाला वर्ग 25.5 – 30. 5 है,
अत: बहुलक वर्ग 25.5 – 30. 5 है।

सूत्र से, बहुलक $Mo = l + \frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_1} \times i$

यहाँ, $l = 25.5, f_0 = 50, f_{-1} = 11, f_1 = 5, i = 5$

$$\text{बहुलक} = 25.5 + \frac{50-11}{2\times 50 - 11 - 5} \times 5$$

$$= 25.5 + \frac{39}{100-16} \times 5 = 25.5 + \frac{39}{84} \times 5$$

$$= 25.5 + \frac{195}{84} = 25.5 + 2.32 = 27.82 \text{ लगभग उत्तर।}$$

प्रश्न 46. बहुलक ज्ञात करें।

वर्ग-अंतराल	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	100– 120
विद्यार्थियों की संख्या	10	35	52	61	38	39

(M. Q., Set–IV : 2016)

हल: यहाँ अधिकतम बारंबारता 61 है और संगत वर्ग 60 – 80 है। अत: बहुलक वर्ग 60 – 80 है।

$\therefore \quad l = 60, f_0 = 61, f_{-1} = 52, f_1 = 38, i = 20 - 0 = 20$

$$\text{बहुलक} = l + \frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_1} = 60 + \frac{61-52}{122-52-38} \times 20$$

$$= 60 + \frac{9}{32} \times 20 = 60 + 5.625 = 65.625 = 65.63. \text{ उत्तर।}$$

प्रश्न 47. निम्नलिखित आँकड़े 225 बिजली उपकरणों के प्रेक्षित जीवनकाल (घंटों में) की सूचना देते हैं : **(2012C)**

जीवनकाल (घंटों में) बारंबारता	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120
	10	35	52	61	38	29

विद्युत उपकरणों के जीवनकाल का बहुलक ज्ञात करें।

हल : यहाँ $f_0 = 61, \quad f_{-1} = 52$
$f_1 = 38, \quad l = 60, \quad i = 20$

$$\text{बहुलक} = l + \frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_1} \times i$$

$$= 60 + \frac{61-52}{2\times 61 - 52 - 38} \times 20$$

$$= 60 + \frac{9}{32} \times 20 = 60 + 5.625 = 65.625 \text{ घंटे। उत्तर।}$$

प्रश्न 48. बहुलक निकालें : (M. Q. Set–III : 2015, 2016A)

वर्ग अंतराल	0–20	20–40	40–60	60–80	80–100	100–120
बारंबारता	10	35	52	61	38	29

हल : $M_0 = l + \frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_1} \times i = 60 + \frac{61-52}{2\times 61 - 52 - 38} \times 20$

$$= 60 + \frac{61-52}{122-90} \times 20 = 60 + \frac{9}{32} \times 20 = 60 + \frac{180}{32}$$

$$= 60 + \frac{45}{8} = 60 + 5.63 = 65.63. \text{ उत्तर।}$$

प्रश्न 49. दिये गये बारंबारता बंटन का बहुलक ज्ञात करें :
(2015A, 2016C)

प्राप्तांक	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
विद्यार्थियों की सं॰	2	3	7	6	6	6

हल : यहाँ वर्ग 40 – 55 की बारंबारता सर्वाधिक है,
अत: बहुलक वर्ग = 40 – 55

$l = 40, f_0 = 7, f_{-1} = 3, f_1 = 6, \text{ i} = 55 - 40 = 15$

$$\text{बहुलक} = l + \frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_1} \times i = 40 + \frac{7-3}{2\times 7 - 3 - 6} \times 15$$

$$= 40 + \frac{4}{14-9} \times 15 = 40 + \frac{4}{5} \times 15 = 40 + 12$$

$$= 52. \text{ उत्तर।}$$

प्रश्न 50. निम्नलिखित बारंबारता बंटन से बहुलक ज्ञात करें : (2017A)

वर्ग अंतराल	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
बारंबारता	25	34	50	42	38	14

हल : बहुलक वर्ग = 35 – 40

यहाँ $f_0 = 50, \quad f_{-1} = 34, \quad f_1 = 42, \quad l = 35, \quad i = 5$

$$\text{बहुलक} = l + \frac{f_0 \quad f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_1} \times i$$

$$= 35 + \frac{50-34}{2\times 50 - 34 - 42} \times 5 = 35 + \frac{16}{100-76} \times 5$$

$$= 35 + \frac{16}{24} \times 5 = 35 + \frac{10}{3}$$

$$= 35 + 3.333 = 38.333 \text{ घंटे। उत्तर।}$$

ALWAYS READ BBD BOOKS

प्रश्न 51. निम्नलिखित बारंबारता बंटन किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्ताओं की बिजली की मासिक खपत दर्शाता है। इन आँकड़ों के माध्यक, माध्य और बहुलक ज्ञात कीजिए। इनकी तुलना कीजिए। (2013C)

मासिक खपत (इकाइयों में)	उपभोक्ताओं की संख्या
65–85	4
85–105	5
105–125	13
125–145	20
145–165	14
165–185	8
185–205	4

हल : माध्यक के लिए :

मासिक खपत (इकाइयों में)	उपभोक्ताओं की संख्या (f_i)	संचयी बारंबारता
65 – 85	4	4
85 – 105	5	9
105 – 125	13	22
125 – 145	20	42
145 – 165	14	56
165 – 185	8	64
185 – 205	4	68
योग	$\Sigma f_i = n = 68$	

जहाँ, $\Sigma f_i = n = 68$ तो $\frac{n}{2} = \frac{68}{2} = 34$

जो कि वर्ग-अंतराल 125 – 145 में स्थित है।

∴ माध्यक वर्ग = 125 – 145

अतः, $l = 125; n = 68; f = 20;$

$cf = 22$ और $h = 20$

सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$\text{माध्यक} = l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right] \times h = 125 + \left\{\frac{\frac{68}{2} - 22}{20}\right\} \times 20$$

$$= 125 + \frac{34 - 22}{20} \times 20 = 125 + 12 = 137$$

माध्य के लिए :

मासिक खपत (इकाइयों में)	उपभोक्ताओं की संख्या f_i	वर्ग-चिह्न x_i	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$ या $u_i = \frac{x_i - 135}{20}$	$f_i u_i$
65 – 85	4	75	– 3	– 12
85 – 105	5	95	– 2	– 10 – 35
105 – 125	13	115	– 1	– 13
125 – 145	20	135	0	0
145 – 165	14	155	1	14
165 – 185	8	175	2	16 42
185 – 205	4	195	3	12
योग	$\Sigma f_i = 68$			$\Sigma f_i u_i = 7$

उपर्युक्त आँकड़ों से,

कल्पित मान (a) = 135; वर्ग माप (h) = 20

$$\therefore \quad \bar{u} = \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} = \frac{7}{68} = 0.102$$

सूत्र का प्रयोग करने पर,

माध्य ($\bar{X}$) = $a + h\bar{u}$ = 135 + 20 (0.102)

= 135 + 2.04 = 137:04

बहुलक के लिए :

दिए गए आँकड़ों में अधिकतम बारंबारता 20 है और इसके संगत वर्ग 125 – 145 है।

∴ बहुलक वर्ग = 125 – 145

इसलिए, $l = 125; f_0 = 20; f_{-1} = 13; f_1 = 14$ और $h = 20$

सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$\text{बहुलक} = l \left(\frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_1}\right) \times h = 125 + \left(\frac{20 - 13}{2(20) - 13 - 14}\right) \times 20$$

$$= 125 + \frac{7}{40 - 27} \times 20 = 125 + \frac{140}{13} = 125 + 10.77$$

= 125 + 10.77 = 135.77.

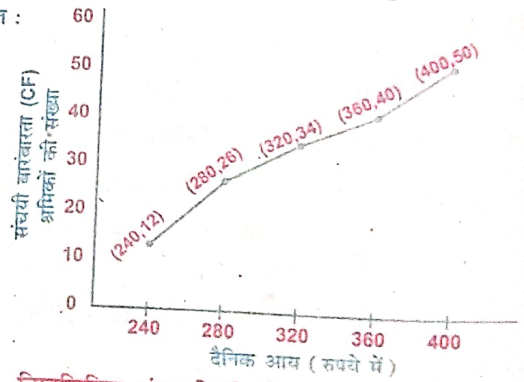
अतः दिए गए आँकड़ों का माध्यक, माध्य और बहुलक है : 137 मात्रक, 137.04 मात्रक और 135.77 मात्रक। उत्तर।

प्रश्न 52. अग्रलिखित बंटन किसी फैक्ट्री के 50 श्रमिकों की दैनिक आय दर्शाता है—

दैनिक आय (रु० में)	240 से कम	280 से कम	320 से कम	360 से कम	400 से कम
श्रमिकों की संख्या	12	26	34	40	50

उपरोक्त बंटन से तोरण खींचिए। (M. Q., Set–I : 2011)

हल :

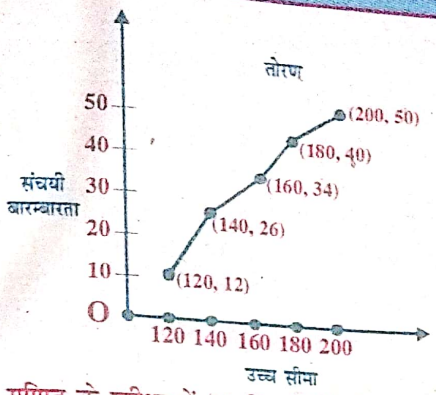


प्रश्न 53. निम्नलिखित बंटन किसी फैक्ट्री के 50 श्रमिकों की दैनिक आय दर्शाता है। इससे तोरण खींचिए। (M. Q., Set–V : 2011)

दैनिक आय (रुपयों में)	100–120	120–140	140–160	160–180	180–200
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

हल :

दैनिक आय	बारंबारता संचयी	बारंबारता
100—120	12	12
120—140	14	26
140—160	8	34
160—180	6	40
180—200	10	50



प्रश्न 54. गणित के परीक्षा में 30 विद्यार्थियों के अंक का बंटन सारणी में दिया गया है उन आँकड़ों का माध्य निकालें : **(M. Q. Set–IV : 2015)**

वर्ग-अंतराल	10–25	25–40	40–55	55–70	70–85	85–100
बारंबारता	2	3	7	6	6	6

हल :

वर्ग-अंतराल	बारंबारता (f)	x	fx
10 – 25	2	17.5	35.0
25 – 40	3	32.5	97.5
40 – 55	7	47.5	332.5
55 – 70	6	62.5	375.0
70 – 85	6	77.5	465.0
85 – 100	6	92.5	555.0
	$\Sigma f = 30$		$\Sigma fx = 1860.0$

$\therefore$ माध्य $= \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \dfrac{1860}{30} = 62$ उत्तर ।

प्रश्न 55. एक स्थानीय टेलीफोन निर्देशिका से 100 कुल नाम (surnames) लिए गए उनमें प्रयुक्त अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों की संख्या का निम्नलिखित बारंबारता बंटन प्राप्त हुआ :

अक्षरों की संख्या	1– 4	4–7	7–10	10–13	13–16	16–19
कुल नामों की संख्या	6	30	40	16	4	4

कुल नामों में माध्यक अक्षरों की संख्या ज्ञात कीजिए। कुल नामों में माध्य अक्षरों की संख्या ज्ञात कीजिए। साथ ही, कुल नामों का बहुलक ज्ञात कीजिए। **(2013A)**

हल : माध्यक के लिए :

अक्षरों की संख्या	कुल नामों की संख्या f_i	संचयी बारंबारता
1 – 4	6	6 = 6
4 – 7	30	6 + 30 = 36
7 – 10	40	36 + 40 = 76
10 – 13	16	76 + 16 = 92
13 – 16	4	92 + 4 = 96
16 – 19	4	96 + 4 = 100
योग	$\Sigma f_i = n = 100$	

यहाँ, $\Sigma f_i = n = 100$

$\therefore \dfrac{n}{2} = \dfrac{100}{2} = 50$

जो कि अंतराल 7 – 10 में स्थित है। $\therefore$ माध्यक वर्ग = 7 – 10

इसलिए, $l = 7$; $n = 100$; $f = 40$; $cf = 36$ और $h = 3$

सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$\text{माध्यक} = l + \left\{\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right\} \times h = 7 + \left\{\frac{\frac{100}{2} - 36}{40}\right\} \times 3 = 7 + \left\{\frac{50 - 36}{40}\right\} \times 3$$

$$= 7 + \frac{14 \times 3}{40} = 7 + \frac{21}{20} = 7 + 1.05 = 8.05$$

अतः, माध्यक अक्षरों की संख्या 8.05 है। उत्तर ।

माध्य के लिए :

अक्षरों की संख्या	f_i	वर्ग-चिह्न (x_i)	$u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ या $u_i = \dfrac{x_i - 8.5}{3}$	$f_i u_i$
1 – 4	6	2.5	– 2	– 12
4 – 7	30	5.5	– 1	– 30
7 – 10	40	**8.5 = a**	0	0
10 – 13	16	11.5	1	16
13 – 16	4	14.5	2	8
16 – 19	4	17.5	3	12
योग	$\Sigma f_i = 100$			$\Sigma f_i u_i = -6$

उपर्युक्त आँकड़ों से, कल्पित माध्य $(a) = 8.5$

वर्ग माप $(h) = 3$ $\therefore$ $\bar{u} = \dfrac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{-6}{100} = -0.06$

सूत्र का प्रयोग करने पर,

माध्यक $(\bar{x}) = a + h\bar{u} = 8.5 + 3(-0.06) = 8.5 - 0.18 = 8.32$

अतः, कुल नामों में माध्य अक्षरों की संख्या 8.32 अक्षर है। उत्तर ।

बहुलक के लिए : दिए गए आँकड़ों में अधिकतम बारंबारता 40 है और इसका संगत अंतराल 7 – 10 है।

$\therefore$ बहुलक वर्ग = 7 – 10

इसलिए, $l = 7$; $f_0 = 40$; $f_{-1} = 30$; $f_1 = 16$ और $h = 3$

सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_1}\right) \times h$$

$$= 7 + \left(\frac{40 - 30}{2(40) - 30 - 16}\right) \times 3 = 7 + \frac{10}{80 - 46} \times 3$$

$$= 7 + \frac{30}{34} = 7 + 0.88 = 7 + 0.88 \text{ (लगभग)} = 7.88$$

अतः, कुल नामों का बहुलक माप 7.88 अक्षर है। उत्तर ।

प्रश्न 56. यदि किसी आँकड़े की माध्यिका 12 एवं बहुलक 18 है, तो आँकड़े का माध्य ज्ञात करें। **(2016A)**

हल : 3 माध्यिका = बहुलक + 2 (माध्य)

$3 \times 12 = 18 + 2$ (माध्य)

$36 = 18 + 2$ (माध्य)

$36 - 18 = 2$ (माध्य)

$18 = 2$ (माध्य)

$\therefore$ माध्य $= \dfrac{18}{2} = 9$ उत्तर ।

ALWAYS READ BBD® BOOKS

प्रायिकता

प्रश्न 1. किसी सिक्के के उछाल में पृष्ठ आने की प्रायिकता क्या होगी ? (M. Q., Set–II : 2011)

हल : ½.

प्रश्न 2. किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग कितना होता है ? (2011A)

हल : 1 होता है।

प्रश्न 3. वह घटना जिसका घटना निश्चित होता है, उसकी प्रायिकता क्या है ? (M. Q., Set–III : 2011, 2013A)

अथवा, एक निश्चित या निर्धारित घटना की प्रायिकता कितनी होती है ?

हल : निश्चित घटना के घटने की प्रायिकता = 1.

प्रश्न 4. एक पासे को एक बार फेंका जाता है। एक अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। (M. Q., Set–V : 2015)

हल : अभाज्य संख्या = 2, 3, 5, = 3

$\therefore$ P (अभाज्य संख्या) $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. उत्तर।

प्रश्न 5. किसी लॉटरी की 500 टिकटें बेची गईं और उन पर 5 पुरस्कार रखे गये हैं। यदि रमेश ने लॉटरी का एक टिकट खरीदा हो, तो उसके पुरस्कार जीतने की प्रायिकता क्या है ? (M. Q., Set–III : 2011)

हल : कुल टिकटें = 500; पुरस्कार = 5

$\therefore$ पुरस्कार पाने की प्रायिकता $= \frac{5}{500} = \frac{1}{100}$. उत्तर।

प्रश्न 6. दो पासों को एक बार फेंका जाता है। प्रत्येक पासे पर एक ही संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात करें। (M. Q., Set–IV : 2011)

हल : दो पासों को एक साथ फेंकने के तरीके = $6 \times 6 = 36$

दोनों पर एक ही संख्या, A = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

$\therefore$ $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ उत्तर।

प्रश्न 7. जब एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है, तो चित्त प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। (2011A)

हल : सिक्का = H, T = 2 (कुल परिणाम); P (चित्त) = ½. उत्तर।

प्रश्न 8. राम दो भिन्न-भिन्न सिक्कों को एक साथ उछालता है (मान लिया कि एक सिक्का 1 रु. का है और दूसरा सिक्का 2 रु. का है)। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह कम से कम एक चित्त प्राप्त करेगा ? (2011C)

हल : दोनों सिक्के उछालने पर संभव परिणाम H H, HT, TH, TT

यदि कम-से-कम एक चित्त आने का संभव परिणाम H H, HT, TH

तो कम-से-कम एक चित्त प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{3}{4}$ उत्तर।

प्रश्न 9. अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इसकी प्रायिकता ज्ञात करें कि यह पत्ता एक इक्का होगा। (2011C)

हल : 52 पत्तों में से, एक पत्ता 52 तरीकों से निकाला जा सकता है।

अत: आरंभिक घटनाओं की कुल संख्या = 52

इसमें 4 इक्का होता है।

अत: $P(\text{इक्का}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ उत्तर।

प्रश्न 10. यह दिया हुआ है कि 3 विद्यार्थियों के एक समूह में 2 विद्यार्थियों के जन्मदिन एक ही दिन न होने की प्रायिकता 0.992 है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इन 2 विद्यार्थियों का जन्मदिन एक ही दिन हो ?

हल : माना कि E एक ही दिन जन्मदिन नहीं की घटना है।

अर्थात् $P(E) = 0.992$ लेकिन $P(E) + P(\bar{E}) = 1$

$\Rightarrow$ $P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0.992 = 0.008$

अत:, इन दो विद्यार्थियों का एक ही दिन जन्मदिन हो, इसकी प्रायिकता 0.008 है।

प्रश्न 11. एक पिग्गी बैंक (piggy bank) में, 50 पैसे के सौ सिक्के हैं, 1 रु० के पचास सिक्के हैं, 2 रु० के बीस सिक्के और 5 रु० के दस सिक्के हैं। यदि पिग्गी बैंक को हिलाकर उल्टा करने पर कोई एक सिक्का गिरने का परिणाम समप्रायिक है, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गिरा हुआ सिक्का 50 पैसे का होगा ?

हल : पिग्गी बैंक में सिक्कों की कुल संख्या = 100 + 50 + 20 + 10 = 180

$\therefore$ प्रारंभिक घटनाओं की कुल संख्या = 180

पिग्गी बैंक में 50 पैसे के सौ सिक्के हैं।

$\therefore$ प्रारंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 100

अत: P (50 पैसे का सिक्का होगा) $= \frac{100}{180} = \frac{5}{9}$. उत्तर।

प्रश्न 12. मान लें कि पासे को हम एक बार फेंकते हैं। 4 से छोटी या उसके बराबर संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या होगी? (M. Q., Set–IV : 2015)

हल : 4 से छोटी या बराबर संख्या = 1, 2, 3, 4.

$\therefore$ P (4 से छोटी या बराबर की प्रायिकता) $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. उत्तर।

प्रश्न 13. गोपी अपने जल-जीव कुंड (aquarium) के लिए एक दुकान से मछली खरीदती है। दुकानदार एक टंकी, जिसमें 5 नर मछली और 8 मादा मछली हैं, में से एक मछली यादृच्छया उसे देने के लिए निकालता है (देखिए आकृति)। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाली गई मछली नर मछली है ?



हल : टंकी में मछलियों की कुल संख्या = 5 + 8 = 13

$\therefore$ प्रारंभिक घटनाओं की कुल संख्या = 13

टंकी में 5 नर मछली हैं।

$\therefore$ प्रारंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 5

अत: P(नर मछली निकालना) $= \frac{5}{13}$. उत्तर।

प्रश्न 14. किसी कारण 12 खराब पेन 132 अच्छे पेनों में मिल गए हैं। केवल देखकर यह नहीं बताया जा सकता है कि कोई पेन खराब है या अच्छा है। इस मिश्रण से, एक पेन यादृच्छया निकाला जाता है। निकाले गए पेन की (i) अच्छा (ii) अच्छा नहीं होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : 132 + 12 में से, अर्थात् 144 पेन में से, एक पेन का चयन 144 बार किया जा सकता है।

$\therefore$ आरंभिक घटनाओं की कुल संख्या = 144

(i) P(एक अच्छा पेन प्राप्त करना) $= \frac{132}{144} = \frac{11}{12}$.

(ii) अत: (खराब) $= \frac{12}{144} = \frac{1}{12}$. उत्तर।

प्रश्न 15. एक थैले में एक लाल गेंद, एक नीली गेंद और एक पीली गेंद हैं तथा सभी गेंद एक ही साइज की हैं। चुनमुन बिना थैले के अन्दर झाँके इसमें से एक गेंद निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गेंद पीली होगी? (2013A)

हल : चुनमुन थैले से, उसमें बिना अन्दर झाँके, गेंद निकालती है। अत: उसके द्वारा कोई भी गेंद निकालना समप्रायिक है।

माना कि पीली गेंद निकालना घटना y है। सभी संभव परिणामों की संख्या 3 है।

घटना y के अनुकूल परिणामों की संख्या = 1. अत: $P(y) = 1/3$. उत्तर।

प्रश्न 24. मान लीजिए एक पासे को एक बार फेंका जाता है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए— (M. Q., Set–V : 2011)

(i) 4 से बड़ी संख्या होने की

(ii) 4 से छोटी या उसके बराबर संख्या होने की।

हल : एक पासे को एक बार फेंकने पर प्रतिदर्श समष्टि

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(i) $A = 4$ से बड़ी संख्या $= \{5, 6\}$, $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) $B = 4$ से छोटी या उसके बराबर $= \{1, 2, 3\} + \{4\}$,

$P(B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. उत्तर।

प्रश्न 25. 52 पत्तों की अच्छी प्रकार से फेंटी गई एक गड्डी से एक पत्ता निकाला जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

(i) लाल रंग का बादशाह

(ii) एक फेस कार्ड अर्थात् तस्वीर वाला पत्ता

(iii) लाल रंग का तस्वीर वाला पत्ता

(iv) पान का गुलाम (M. Q., Set–III : 2015)

(v) हुकूम का पत्ता

(vi) एक ईंट की बेगम (M. Q., Set–III : 2015)

हल : 52 पत्तों में से, एक पत्ता 52 तरीकों से निकाला जा सकता है।

अत:, आरंभिक घटनाओं की कुल संख्या = 52

(i) गड्डी में लाल पत्तों के दो समूह हैं यथा ईंट और पान। प्रत्येक समूह में एक बादशाह है।

∴ आरंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या $= 2 \times 1 = 2$

अत:, P(लाल रंग का बादशाह) $= \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$; उत्तर।

(ii) 52 पत्तों की गड्डी में : बादशाह, बेगम और गुलाम को फेस कार्ड या तस्वीर वाला पत्ता कहते हैं। इस प्रकार, एक गड्डी में 12 फेस कार्ड होते हैं। अत: एक फेस कार्ड का चुनाव 12 तरीकों से किया जा सकता है।

∴ आरंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 12

अत: P(एक फेस कार्ड) $= \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$; उत्तर।

(iii) गड्डी में लाल पत्तों के दो समूह होते हैं, यथा ईंट और पान। प्रत्येक समूह में तीन फेस कार्ड होते हैं।

∴ प्रारंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या $= 2 \times 3 = 6$

अत:, P(एक लाल फेस कार्ड) $= \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$; उत्तर।

(iv) इसमें पान का गुलाम केवल एक होता है।

∴ प्रारंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 1

अत:, P(पान का गुलाम) $= \frac{1}{52}$; उत्तर।

(v) गड्डी में हुकूम के 13 कार्ड होते हैं।

∴ प्रारंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 13

अत:, P(एक हुकूम) $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$; उत्तर।

(vi) इसमें ईंट की केवल एक बेगम होती है।

∴ आरंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 1

अत:, P(ईंट की बेगम) $= \frac{1}{52}$; उत्तर।

प्रश्न 26. दो खिलाड़ी मनोज और उत्तम टेनिस का एक मैच खेलते हैं। यह ज्ञात है कि मनोज द्वारा मैच जीतने की प्रायिकता 0.62 है। उत्तम के जीतने की प्रायिकता क्या होगी ? (M. Q., Set–I : 2011)

हल : मान लिया मनोज की जीतने की घटनाएँ M तथा उत्तम की जीतने की घटनाएँ U है।

∵ मनोज के जीतने की प्रायिकता $= P(M) = 0.62$ (दिया है)

∴ उत्तम के जीतने की प्रायिकता $= P(U) = 1 - P(M)$

(क्योंकि घटनाएँ M और U पूरक हैं)

$= 1 - 0.62 = 0.38$. उत्तर।

प्रश्न 27. ताश के पाँच पत्तों–ईंट का दहला, गुलाम, बेगम, बादशाह और इक्का, को पलट कर के अच्छी प्रकार फेंटा जाता है। फिर इनमें से यादृच्छया एक पत्ता निकाला जाता है।

(i) इसकी क्या प्रायिकता है कि यह पत्ता एक बेगम है ?

(ii) यदि बेगम निकल आती है, तो उसे अलग रख दिया जाता है और अन्य पत्ता निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि दूसरा निकाला गया पत्ता (a) एक इक्का है ? (b) एक बेगम है ?

हल : पाँच पत्तों–ईंट का दहला, गुलाम, बेगम, बादशाह और इक्का में से एक पत्ता 5 तरीकों से निकाला जाता है। अत:, प्रारंभिक घटनाओं की कुल संख्या = 5

(i) इनमें बेगम केवल एक है।

∴ प्रारंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 1

अत: P(बेगम) $= \frac{1}{5}$; उत्तर।

(ii) बेगम के पत्ते को एक ओर रखने के बाद, हमारे पास 4 पत्ते बचते हैं।

अत:, कुल प्रारंभिक घटनाओं की संख्या = 4

(a) इनमें केवल एक इक्का है।

∴ प्रारंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 1

अत: P(एक इक्का) $= \frac{1}{4}$; उत्तर।

(b) बेगम के रूप में कोई पत्ता नहीं है।

∴ प्रारंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 0

अत: P(बेगम) $= \frac{0}{4} = 0$; उत्तर।

प्रश्न 28. एक चित्त प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है। साथ ही, एक पट प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : सिक्का = H, T = 2 (कुल परिणाम)

P (चित्त) $= \frac{1}{2}$, P (पट) $= \frac{1}{2}$; उत्तर।

प्रश्न 29. (i) 20 बल्बों के एक समूह में 4 बल्ब खराब हैं। इस समूह में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बल्ब खराब होगा ? (2017A)

(ii) मान लीजिए (i) में निकाला गया बल्ब खराब नहीं है और न ही इसे दुबारा बल्बों के साथ मिलाया जाता है। अब शेष बल्बों में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बल्ब खराब नहीं होगा ?

हल : (i) 20 बल्बों में से एक बल्ब 20 तरीकों से चुना जा सकता है।

∴ आरंभिक घटनाओं की कुल संख्या = 20

इनमें 4 बल्ब खराब हैं जिनमें से एक बल्ब को 4 तरीकों से निकाला जा सकता है।

अत:, P(एक खराब बल्ब निकालना) $= \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$; उत्तर।

(ii) 20 बल्बों में से एक अच्छा बल्ब निकाल लेने के बाद हमारे पास 4 खराब बल्ब सहित 19 बल्ब रह जाते हैं।

∴ आरंभिक घटनाओं की कुल संख्या = 19

इनमें 19 – 4 = 15 अच्छे बल्ब हैं जिनमें से एक बल्ब 15 तरीके से निकाला जा सकता है।

∴ प्रारंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 15

अत:, P(अच्छा बल्ब निकालना) = $\frac{15}{19}$; उत्तर।

प्रश्न 30. एक थैले में 3 लाल, 5 काली तथा 7 सफेद गेंद हैं। थैले में से यदृच्छया (Randomly) एक गेंद निकाली गई। प्रायिकता ज्ञात करें कि निकाली गई गेंद काली नहीं है। (M. Q., Set–II : 2011)

हल : लाल काली सफेद

कुल गेंद = 3 + 5 + 7 = 15

माना घटना A = गेंद काली नहीं है।

= गेंद लाल या सफेद है।

∴ P(A) = P (लाल गेंद) + P (सफेद गेंद) = $\frac{3}{15}+\frac{7}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

प्रश्न 31. एक पेटी में 90 डिस्क (discs) हैं, जिन पर 1 से 90 तक संख्याएँ अंकित हैं। यदि इस पेटी में से एक डिस्क यादृच्छया निकाली जाती है तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस डिस्क पर अंकित होगी : (i) दो अंकों की एक संख्या (ii) एक पूर्ण वर्ग संख्या (iii) 5 से विभाज्य एक संख्या।

हल : पेटी में 1 से 90 तक की संख्याओं वाली 90 डिस्क हैं जिनमें से एक डिस्क 90 तरीकों से निकाली जा सकती है।

∴ आरंभिक घटनाओं की कुल संख्याएँ = 90

(i) पेटी में दो अंकों की संख्या वाली 90 – 9, अर्थात् 81 डिस्क हैं, जिनमें से एक डिस्क को 81 तरीकों से निकाला जा सकता है।

∴ आरंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 81

अत:, P(दो अंकों वाली संख्या से युक्त डिस्क पाना) = $\frac{81}{90}=\frac{9}{10}$; उत्तर।

(ii) 1 से 90 की घटनाओं में पूर्ण वर्ग हैं 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 अर्थात् क्रमश: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 और 9 के वर्ग।

अत:, 9 डिस्क ऐसी हैं जिन पर पूर्ण वर्ग संख्याएँ अंकित हैं।

∴ आरंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्याएँ = 9

अत:, P(पूर्ण वर्ग वाली संख्या से चिह्नित डिस्क पाना) = $\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$; उत्तर।

(iii) 1 से 90 में से वे संख्याएँ जो 5 से विभाजित हो जाती हैं, वे हैं 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85 और 90 ; ये संख्या में 18 हैं।

अतएव, 18 डिस्क पर ऐसी संख्याएँ अंकित हैं जो 5 से विभाजित होती हैं।

∴ आरंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 18

अत:, P(ऐसी डिस्क की प्राप्ति जिस पर अंकित संख्या 5 से विभाज्य है)

= $\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$; उत्तर।

प्रश्न 32. अच्छी प्रकार फेंटी गयी 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। प्रायिकता क्या होगी यह पत्ता (i) एक एक्का है। (ii) एक एक्का नहीं है। (M. Q., Set–II : 2015)

हल : सम्भव परिणामों की कुल संख्या = 52

एक गड्डी में कुल इक्का की संख्या = 4

(i) P (इक्का की संख्या) = $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$

(ii) P (इक्का नहीं) = $1-\frac{1}{13}=\frac{12}{13}$. उत्तर।

प्रश्न 33. एक थैले में 4 लाल, 5 काली एवं 3 पीली गेंद हैं। कोई एक गेंद निकाली जाती है। निकाली गई गेंद के (i) पीली रंग के होने की (ii) लाल रंग के नहीं होने की प्रायिकता ज्ञात करें। (M. Q., Set–IV : 2011, 2012C)

हल : कुल गेंद = लाल 4 काली 5 पीली 3 = 12

(i) पीली गेंद होने की प्रायिकता = $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ उत्तर

(ii) लाल रंग की नहीं होने की प्रायिकता = $\frac{5+3}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ उत्तर।

प्रश्न 34. एक बच्चे के पास ऐसा पासा है जिसके फलकों पर निम्नलिखित अक्षर अंकित हैं :

A	B	C	D	E	A

इस पासे को एक बार फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि (i) A प्राप्त हो ? (ii) D प्राप्त हो ?

हल : पासा एक बार फेंके जाने पर इसके फलकों पर अंकित A, B, C, D, E, A अक्षरों में से हमें कोई भी प्राप्त हो सकता है। अत: पासे को फेंकने के यादृच्छया प्रयोग से संबद्ध प्रारंभिक घटनाओं की कुल संख्या 6 है।

(i) माना कि E "A अक्षर की प्राप्ति" की घटना को दर्शाता है। स्पष्ट है, घटना E दो फलकों पर घटित होती है।

∴ आरंभिक घटनाओं की अनुकूल संख्या = 2

∴ P(E) = $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; उत्तर।

(ii) माना E "D अक्षर की प्राप्ति" की घटना को दर्शाता है। स्पष्ट है, घटना E एक फलक पर घटित होती है।

∴ प्रारंभिक घटना की अनुकूल संख्या = 1

∴ P(E) = $\frac{1}{6}$; उत्तर।

प्रश्न 35. 20 बल्बों के एक समूह में 4 बल्ब खराब हैं। इस समूह में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बल्ब (i) खराब (ii) खराब नहीं होगा ?

हल : (i) P (खराब) = $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}=0.2$; उत्तर।

(ii) P (खराब नहीं) = 1 – 0.2 = 0.8; उत्तर।

प्रश्न 36. एक स्लेटी पासे और एक नीले पासे को एक साथ फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों पासों की संख्याओं का योग (i) 8 है ? (ii) 13 है ?

हल : दोनों पासों की कुल घटनाएँ :

= 6 × 6 = 36

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)

(i) दोनों पासों की संख्याओं का योग 8 के युग्म

= (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) = 5

P(8) = $\frac{5}{36}$; उत्तर।

(ii) दोनों पासों की संख्याओं का योग 13 के युग्म = 0

P(13) = $\frac{0}{36}=0$; उत्तर।

प्रश्न 37. एक थैले में 3 लाल और 5 काली गेंदें हैं। इस थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि गेंद (i) लाल हो ? (ii) लाल नहीं हो ? **(2013C, M. Q., Set–I : 2015, 2017A)**

हल : कुल गेंद $= 3 + 5 = 8$

(i) लाल गेंद होने की प्रायिकता $= \frac{3}{8}$

(ii) लाल गेंद नहीं होने की प्रायिकता $= \frac{5}{8}$ उत्तर।

प्रश्न 38. किसी कारण से 11 खराब पेन 121 अच्छे पेनों में मिल गये हैं। केवल देखकर यह नहीं बताया जा सकता है कि कोई पेन खराब है या अच्छा है। इस मिश्रण में से एक पेन यादृच्छया निकाला जाता है। निकाले गये पेन के अच्छा होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **(2014A)**

हल : कुल संभव परिमाणों की संख्या $n(S) = 121 + 11 = 132$

अच्छे पेनों की संख्या $n(E) = 121$

$\therefore$ अच्छे पेनों की प्रायिकता $p(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{121}{132} = 0.92$. उत्तर।

प्रश्न 39. किसी पासे को एक बार फेंका जाता है, तो एक विषम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात करें। **(2015A)**

हल : एक पासे को फेंकने पर संभव परिणाम = 1, 2, 3, 4, 5, 6

सभी संभव परिणामों की संख्या = 6

मान लिया कि O विषम संख्या आने की घटना तो O के अनुकूल परिणाम = 1, 3, 5

अर्थात् अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

$\therefore$ P (विषम संख्या आना) = P (O)

$$= \frac{O \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$ उत्तर।

प्रश्न 40. किसी कारण 13 खराब पेन 143 अच्छे पेनों में मिल गये हैं। केवल देखकर यह नहीं बताया जा सकता है कि कोई पेन खराब है या अच्छा है। इस मिश्रण में से एक पेन यादृच्छया निकाला जाता है। निकाले गये पेन के अच्छा होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **(2014A)**

हल : कुल संभव परिमाणों की संख्या $n(S) = 13 + 143 = 156$

अच्छे पेनों की संख्या $n(E) = 143$

$\therefore$ अच्छे पेनों की प्रायिकता $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{143}{156}$. उत्तर।

प्रश्न 41. एक थैले में 5 लाल और कुछ नीली गेंदें हैं। यदि नीली गेंद निकालने की प्रायिकता लाल गेंद निकालने की प्रायिकता की दुगुनी हो, तो थैले में नीली गेंदों की संख्या निकालें। **(2012A, 2015A)**

हल : माना कि थैले में n नीली गेंदें हैं।

थैले में गेंदों की संख्या $= 5 + n$

अब P_1 = एक नीली गेंद निकालने की प्रायिकता $= \frac{n}{5+n}$

P_2 = एक लाल गेंद निकालने की प्रायिकता $= \frac{5}{5+n}$

परन्तु दिया हुआ है कि $P_1 = 2P_2$

या, $\frac{n}{5+n} = 2 \times \frac{5}{5+n}$ या, $n = 10$

अत: थैले में 10 नीली गेंदें है। उत्तर।

प्रश्न 42. किसी कारण से 10 खराब पेन 120 अच्छे पेनों में मिल गये हैं। केवल देखकर यह नहीं बताया जा सकता है कि कोई पेन खराब है या अच्छा है। इस मिश्रण में से एक पेन यादृच्छया निकाला जाता है। निकाले गये पेन की अच्छी होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **(2014C)**

हल : पेनों की कुल संख्या $= 10 + 120 = 130$

P (एक अच्छा पेन) $= \frac{120}{130} = \frac{12}{13}$ उत्तर।

प्रश्न 43. एक जार में 36 कंचे हैं जिनमें कुछ हरे हैं और शेष नीले हैं। यदि जार में से यादृच्छया (At random) एक कंचा निकाला जाता है तो इस कंचे के हरा होने की प्रायिकता ½ है तो जार में नीले कंचे की संख्या बतायें। **(M. Q., Set–III : 2011)**

हल : कुल कंचे $= 36$; हरे कंचे $= x$ माना

$\therefore$ हरे कंचे को निकालने की प्रायिकता $= \frac{x}{36} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{36}{2} = 18$

अत: नीले कंचे $= 36 - 18 = 18$. उत्तर।

प्रश्न 44. एक थैले में 5 लाल और कुछ नीली गेंदें हैं। यदि नीली गेंद को निकालने की प्रायिकता लाल गेंद को निकालने की प्रायिकता से तीन गुनी है तो थैले में रखी नीली गेंदों की संख्या क्या होगी ? **(2015C)**

हल : माना कि थैले में n नीली गेंदे है।

थैले में गेंदों की संख्या $= 5 + n$

अब P_1 = एक नीली गेंद निकालने की प्रायिकता $= \frac{n}{5+n}$

P_2 = एक लाल गेंद निकालने की प्रायिकता $= \frac{5}{5+n}$

परन्तु दिया हुआ है कि $P_1 = 3P_2$

या, $\frac{n}{5+n} = 3 \times \frac{5}{5+n}$ या, $n = 15$

अत: थैले में 15 नीली गेंदें हैं। उत्तर।

प्रश्न 45. तास के 52 पत्तों की एक गड्डी से एक पत्ता यादृच्छया खींचा जाता है उसकी क्या प्रायिकता होगी कि (1) एक एक्का होगा (2) एक एक्का नहीं होगा।

हल : संभव परिणामों की कुल संख्या = 52

(I) इक्का होने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(II) इक्का नहीं होने की प्रायिकता = 1 – इक्का होने की प्रायिकता

$= 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$ उत्तर।

प्रश्न 46. दो सिक्कों को ठीक एक साथ उछाला जाता है तो शीर्ष आने की प्रायिकता ज्ञात करें। **(M. Q., Set–V : 2016)**

हल : सिक्कों पर प्राप्त परिणाम HH या HT या TH या TT होगा।

$\therefore$ कुल संभव परिणामों की संख्या $n(S) = 4$.

अनुकूल परिणामों की संख्या $n(E) = 3$

[$\because$ अभीष्ट अवस्था : (HH या HT या TH)]

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{4}$.